UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL – FACULTAD RECIONAL ROSARIO

Álgebra y Geometría Analítica

Vectores

Mercedes Anido

Año 2012

ANTECEDENTES BIBLIOGRÁFICOS Y ORGANIZACIÓN DE LOS CONTENIDOS

Una explicación para docentes y para aquellos alumnos que, como universitarios, están interesados en entender el porqué de cada contenido de programa de su carrera

La “idea” es hacer del vector geométrico, con las estructuras algebraicas, que definen de hecho las operaciones de suma, producto por un escalar, y producto escalar; un referente visual e intuitivo, facilitador de la comprensión global de los problemas, que más adelante con n-uplas y matrices se plantean en algunos niveles de las técnicas cuantitativas , o que exigen una abstracción superior, como la que se requiere en los espacios funcionales que se manejan en la matemática para ingenieros.

En esa concepción, se afianza un manejo introductorio de todas las operaciones con vectores “flecha” en forma “totalmente geométrica y sintética”. Se busca así la formación del alumno en el concepto de que, las operaciones, propiedades y conclusiones de los espacios vectoriales, tienen carácter intrínseco e invariante, respecto de los distintos sistemas de referencia que se utilicen en las distintas aplicaciones.

Una vez comprendidas todas las operaciones en un “contexto geométrico”, a partir de la definición de las bases canónicas respectivas, se introducen las representaciones en componentes, en la recta, el plano y el espacio. La simplificación que significa considerar directamente las bases canónicas, queda justificada porque en la matemática básica de grado de una Facultad de Ingeniería se trabaja solo con estas bases (el concepto de descomposición en otro tipo de base, ya ha sido adquirido en .la Física de la escuela media).

A partir de la justificación de la existencia y unicidad de la descomposición en la base queda, como desafío para el alumno, la demostración de las nuevas expresiones de las operaciones en componentes. Se opera, así en $\Re$, $\Re^2$ y $\Re^3$ a partir de una correspondencia con la recta, el plano y el espacio. Los vectores se refieren a la base relacionada.

Recién en este punto se introducen los sistemas cartesianos ortogonales, el plano y el espacio. Estos sistemas asociados a las bases canónicas respectivas, llevan a la definición del vector posición que relaciona el espacio de los puntos y el espacio de los vectores. Este concepto facilita un enfoque vectorial simplificador de la enseñanza de las ecuaciones de curvas y superficies que modelizan matemáticamente problemas de la Ingeniería y también se aplica en toda la enseñanza moderna del Cálculo.

El paso al espacio $\Re^n$ de las n-uplas y sus operaciones, con el manejo adquirido resulta una generalización inmediata que lo puede encarar el alumno, como ejercicio, si lo necesita.

CONSEJOS PARA TRABAJAR EN LA UNIDAD

Esta unidad tiene como propósito fundamental facilitar la construcción del conocimiento de los vectores en sus distintas representaciones. Ha sido diseñada para generar un proceso a través del cual se combinen nuevos elementos teóricos con conceptos previamente adquiridos y se ejerciten competencias y técnicas. En este proceso las definiciones se construyen, las propiedades se anticipan por el estímulo de la intuición geométrica y las demostraciones son respuestas a un desafío lógico.

Esto hace que la unidad no pueda ser simplemente leída, debe ser trabajada con lápiz y papel en mano. Podríamos decir que brinda un espacio para exploración de nuevos conocimientos, en el que el alumno "haga Matemática" y sienta el placer de protagonizar su aprendizaje.

En su desarrollo se complementan: reflexiones, recuerdos, definiciones, enunciados de propiedades, demostraciones y problemas gráficos y analíticos. Todos estos ejercicios intelectivos no pueden aislarse. Por ejemplo hay demostraciones que se plantean como parte de las llamadas "Actividades" que en una primera lectura podrían parecer sólo de tipo práctico. Dichas actividades son muy simples pero "hacen pensar".

Se plantean autoevaluaciones y problemas finales. Su nivel de dificultad dará una idea del nivel de las evaluaciones.

También figuran los resultados de algunas de las actividades, de las autoevaluaciones, de los problemas introductorios y finales,

Si surgen dudas en su resolución se debe volver a reflexionar sobre los conceptos teóricos y se aconseja discutir con compañeros. De no tenerse la certeza de haber seguido un procedimiento correcto, consultar con el docente

INTRODUCCION

Presentaremos y estudiaremos una herramienta de conocimiento muy útil a la que llamamos vector. El conocimiento que vamos a construir será un poderoso instrumento de razonamiento para todo el desarrollo y práctica profesional.

Los vectores, por lo estudiado en la escuela media, permiten representar las propiedades del mundo físico (fuerza, velocidad, etc.). Pero su utilización va mas allá. Se utilizan vectores para modelizar problemas en todo el campo de las ciencias, incluso las sociales.

Tan importantes son, que durante un proceso dictatorial se los consideró subversivos!!!.

Cuando se toca una tecla de un computador se introduce un vector binario, en su lenguaje interno. Además, casi toda la información que maneja el computador en las Ciencias Económicas, implica un manejo de conjuntos de vectores.

¿Cómo presentaremos los vectores?

Mediante dos representaciones que están en correspondencia biunívoca. La primera, será geométrica y se apoyará en los conceptos sobre magnitudes vectoriales que ya se poseen de la física. La segunda representación nos permitirá operar con vectores como conjuntos ordenados de números. La geométrica, por ser visual, servirá de apoyo intuitivo a la numérica, y facilitará la percepción global de un problema.

Ambas representaciones son ejemplos de una estructura más abstracta que se llama espacio vectorial. Esta estructura se estudia en una de las ramas más modernas y más importantes en cuanto a su aplicación en temas económicos: el Álgebra Lineal.

Todas estas consideraciones nos llevarán a enunciar algunos objetivos de la Unidad y presentar problemas introductorios que, más adelante, se resolverán con las herramientas que se aprenderán a manejar en el desarrollo de dicha unidad.

OBJETIVOS:

a) Simplificar desarrollos de temas posteriores. Algunos pueden incluso considerarse generalizaciones de los vectores, por ejemplo las matrices, que se tratan en unidades siguientes.

b) Presentar un ejemplo de la estructura de espacios vectoriales, cada vez más utilizada en las técnicas cuantitativas, en el área de la misma Matemática y en otras específicas de la carrera.

c) Introducir el concepto de vector posición de un punto, en un sistema cartesiano ortogonal, para facilitar el estudio de las ecuaciones de la recta, el plano y de otros lugares geométricos utilizados en la modelización matemática y el Cálculo moderno.

MAPA CONCEPTUAL

Vectores geométricos o flechas

$\left\{\begin{array}{l}\text{Dirección}\\ \text{Sentido}\\ \text{Módulo}\end{array}\right.$

Vectores de la recta

Vectores del plano

Vectores del espacio

Base en V_1

Base en V_2

Base en V_3

$\{\ \Re\ , +, \bullet\ \}$

$\{\ \Re^2, +, \bullet\ , x\ \}$

$\{\ \Re^3, +, \bullet\ , x\ \}$

Generalización a $\{\ \Re^n, +, \bullet\ , x\ \}$·

$\Re^n = \{(a_1, a_2, a_3,\ldots,a_n) / a_i \in \Re,\ i=1,2,3,\ldots,n\}$

·$\{\Re,+,\bullet\}$ conjunto de números reales con las operaciones de suma y producto de un número por un vector.

$\{\Re^2,+,\bullet,x\}$ conjunto de pares ordenados de números reales con las operaciones de suma, producto de un número por un vector y producto escalar.

$\{\Re^3,+,\bullet,x\}$conjunto de ternas de números reales con las operaciones de suma, producto de un número por un vector y producto escalar.

PROBLEMAS INTRODUCTORIOS

Presentaremos algunos problemas muy simples y restringidos a escasos datos que puedan dar una primera idea de las aplicaciones. Con el trabajo de la unidad se estará en condiciones de resolverlos.

Ejemplo 1

Un fabricante produce tres artículos: camisas, remeras y bermudas. La demanda mensual esta dada por el vector demanda $\overline{d}$ = (500,300,200). El precio por unidad de cada artículo está dado por el vector precio $\overline{p}$ = ($30,$40,$18). Si se coloca toda la demanda, ¿Cuánto dinero reúne el fabricante?. [ver solución]

Ejemplo 2

Un empleado compra un pack de 10 CD-Rom, 20 DVD y 2 cartuchos de tinta negra. Los precios intuitivos respectivos son de $6, $2 y $15. A la media hora recibe la orden de duplicar la compra anterior al mismo proveedor y a los mismos precios. ¿Cuál es el costo total de la compra? [ver solución]

Ejemplo 3

En un ministerio de economía interesa conocer la relación entre las tasas de crecimiento de tres sectores económicos: Primario, Industria y Servicios.

Siendo C_p= Tasa de crecimiento del sector primario

C_i= Tasa de crecimiento del sector industria

C_s= Tasa de crecimiento del sector servicios

y existiendo la siguiente relación: $\boxed{C_i = 50\ C_p}$

$\boxed{C_s = 50\ C_p}$

Se pide :

1) Definir un vector tasa de crecimiento con esos datos.

2) Demostrar que los vectores tasa de crecimiento así definido (variando Cp) cumplen condiciones de homogeneidad y aditividad que permiten suponer que ante cualquier variación de cada uno de ellos, los otros se adaptan automáticamente. [ver solución]

1 EL VECTOR GEOMÉTRICO

UN RECUERDO SOBRE EL CONCEPTO DE MAGNITUDES ESCALARES Y VECTORIALES

Revisemos algunos conceptos del mundo físico:

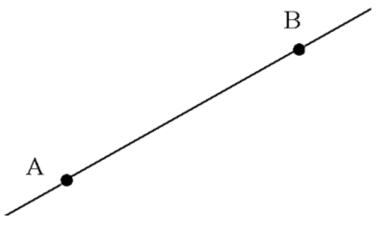
Magnitudes escalares: son las que quedan perfectamente determinadas por un número real, que es su medida. Ej.: longitud, temperatura, ángulo, tiempo, saldo de cuenta de un banco.

Magnitudes vectoriales: son las que no quedan determinadas sólo por un número real, sino que es preciso dar la dirección y el sentido con que actúan. Ej.: fuerza, aceleración, velocidad, translación.

Para estudiar matemáticamente estas últimas es necesario recurrir a los entes que las representen y modelizan: los ***vectores****.*

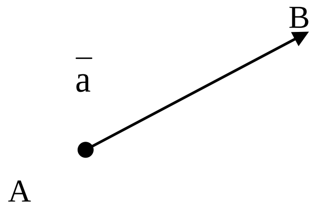
1.1 Segmento orientado

Si ubicamos dos puntos sobre una recta, en la Geometría que conocemos,



el segmento AB es igual al segmento BA.

Cuando consideramos al punto A ***como origen o punto inicial***, y a B ***punto final o extremo***, diremos que hemos orientado el segmento. La orientación elegida la indicaremos con una flecha.



Utilizaremos la siguiente notación para representar este segmento orientado:

$\overline{\mathbf{AB}}$ o bien $\bar{a}$

Llamamos ***vector*** a todo segmento orientado. En nuestro caso hemos introducido al vector $\bar{a}$.

Ahora debemos caracterizar a este objeto matemático.

Los puntos A y B determinan una recta, a la que pertenecen.

Hemos convenido en que A es el punto inicial u origen y que B es el punto final o extremo.

Como A ≠ B, existe una distancia entre ellos.

De acuerdo con estas tres observaciones, resulta natural definir a un vector mediante tres características:

1.2 Características de un vector

Dirección: la de la recta que contiene a ambos puntos, llamada recta sostén, o la de cualquier paralela a la misma (dos rectas paralelas tienen la misma dirección).

Sentido: la orientación del segmento elegida sobre la recta, al decidir cuál es el punto origen y cuál es el punto extremo (gráficamente está indicado por la flecha).

Módulo: es la longitud (número real no negativo), del segmento AB, es decir, la distancia entre A y B. Se simboliza $|\bar{a}|$.

1.3 Igualdad de vectores

Si tenemos dos vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$, parece natural afirmar que son iguales si y sólo si tienen

- misma dirección
- mismo sentido
- igual módulo

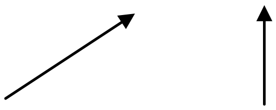
Lo simbolizamos $\bar{a} = \bar{b}$

Si alguna de las condiciones anteriores no se cumple decimos que $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son distintos. Lo simbolizamos $\bar{a} \neq \bar{b}$.

ACTIVIDADES I

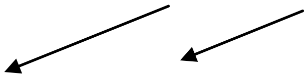
1) Dibuja dos vectores iguales.

2) Dados los vectores:

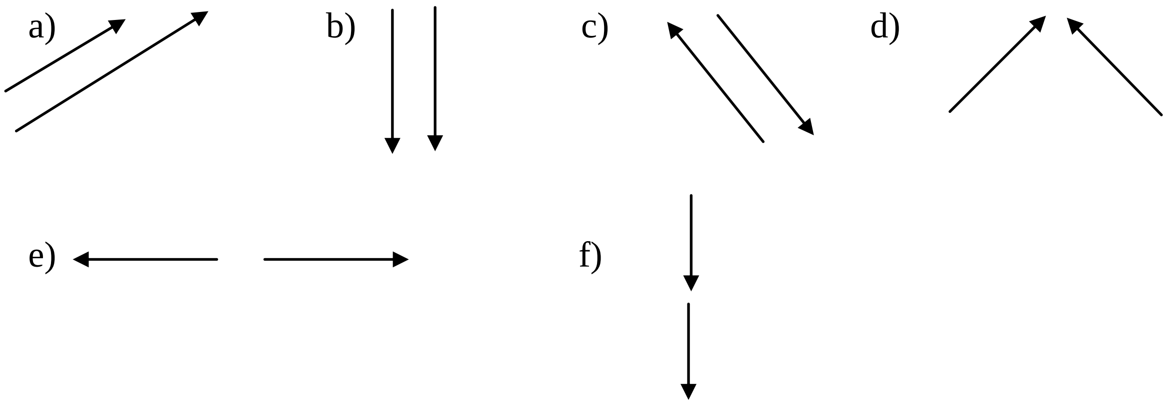


¿Se podría afirmar que los sentidos de los mismos son iguales?

3) y en este caso



4) Señala cuáles de los siguientes pares de vectores son iguales. Justifica en cada caso tu respuesta.



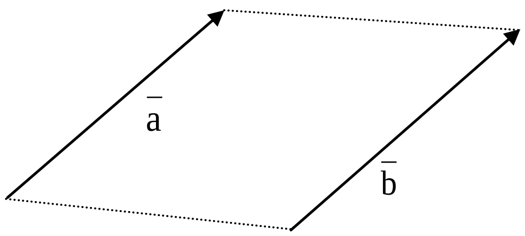
[Soluciones Actividades I]

1.4 Vectores libres

¿Qué idea respecto a la traslación de un vector surge de la definición de igualdad dada?

¿Podríamos convenir que dado un vector, se puede trasladar paralelamente a sí mismo, sin alterar sus tres características?

$\bar{a} = \bar{b}$



Esta idea de libertad de movimiento hace que la definición dada de vectores caracterice a los llamados vectores libres.

En adelante, cuando hablemos de vectores haremos referencia a los vectores libres.

1.5 Vector opuesto

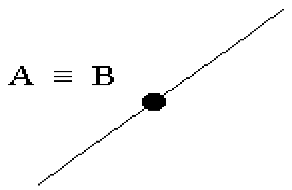
Observamos en el ejercicio 4-c) de las actividades, que los vectores tienen la misma dirección (porque están contenidos en rectas paralelas), el mismo módulo pero sentidos opuestos. Esos vectores se llaman ***vectores opuestos***.

Si $\bar{a}$ es un vector, simbolizaremos su opuesto con $-\bar{a}$

OBSERVACIÓN: ¿qué vector es el opuesto de $-\bar{a}$?

1.6 Vector nulo

Si sobre una recta tomamos los puntos A y B coincidentes:



no se obtiene un vector tal como lo presentamos, pues la dirección y el sentido no están determinados, sin embargo nos conviene introducir el concepto de **vector nulo**; que es aquél cuyo punto origen y punto final coinciden.

Lo simbolizaremos $\bar{0}$

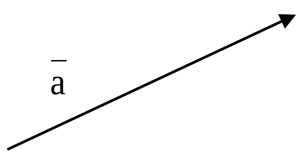
Naturalmente no podremos hablar ni de su dirección ni de su sentido, pero es evidente que $|\bar{0}| = 0$.

Ahora, podemos ampliar la definición de igualdad entre vectores, que hemos dado, diciendo que **todos los vectores de módulos cero son iguales**.

ACTIVIDADES II

1) ¿Por qué no se puede hablar de dirección y sentido del vector nulo?

2) Dado el vector $\bar{a}$, dibuja $-\bar{a}$.



3)Dibuja el vector nulo.

[Soluciones Actividades II]

2 OPERACIONES CON VECTORES

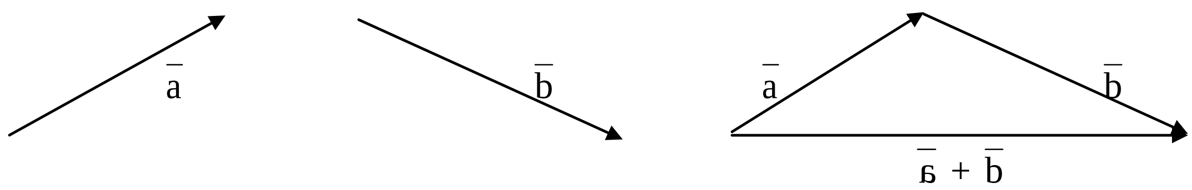
REFLEXIONES PREVIAS A LA CONSTRUCCIÓN DE UNA DEFINICIÓN

A partir de uno o dos vectores construiremos nuevos vectores definiendo operaciones sobre vectores dados, algunas de las cuales ya se han conocido al trabajar con elementos de la Física o se pueden intuir ¿Cómo podría construirse un vector suma de dos vectores con la misma dirección y el mismo sentido?.

¿Cómo podría construirse con la misma dirección y distinto sentido? ¿y con distinta dirección? ¿Cómo construir un vector suma que sirva para operar en todas estas situaciones?

2.1 *Suma de dos vectores.*

Dados los vectores $\overline{a}$ y $\overline{b}$, por ser vectores libres, siempre es posible hacer coincidir el origen de $\overline{b}$ con el extremo de $\overline{a}$. En esta posición definimos como vector suma $\overline{a} + \overline{b}$ a aquél que tiene como origen, el origen de $\overline{a}$ y como extremo, el de $\overline{b}$.



OBSERVACIÓN: dados $\overline{a}$ y $\overline{b}$, $\overline{a} + \overline{b}$ es único.

REFLEXION

¿Qué propiedades podría tener la operación suma así definida en analogía con la suma de números?

Propiedades de la suma

Si con V simbolizamos al conjunto de todos los vectores, valen las siguientes propiedades $\forall \quad \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \quad \in \quad V$:

S1) $\bar{a} + \bar{b} \in V$ (clausura)

S2) $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$ (asociativa)

S3) $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ (conmutativa)

S4) $\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$ (existencia y unicidad del elemento neutro)

S5) $\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$ (existencia y unicidad del elemento opuesto de un vector)

Actividad III

Verifica las propiedades S2 y S3.

OBSERVACIÓN: Verificada S2, podemos escribir $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$ (sin los paréntesis).

REFLEXION

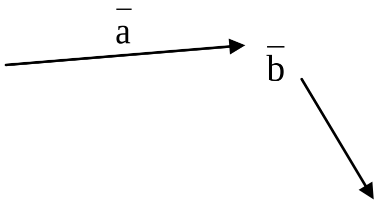
A partir de los conceptos de suma y de vector opuesto, ¿qué otra operación podemos definir?

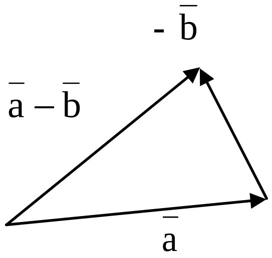
2.2 Diferencia entre dos vectores

Sean $\bar{a}$ y $\bar{b}$ vectores, definimos diferencia entre $\bar{a}$ y $\bar{b}$ y simbolizamos $\bar{a} - \bar{b}$ al vector $\bar{a} + (-\bar{b})$.

Es decir por definición $\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b})$.

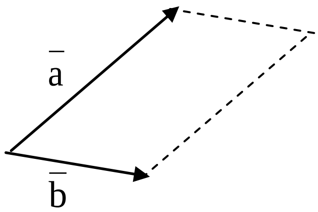
Si $\bar{a} \neq \bar{0}$ y $\bar{b} \neq \bar{0}$, construimos $\bar{a} - \bar{b}$.





ACTIVIDAD IV

1) En el paralelogramo siguiente ¿qué representan sus diagonales para los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$?



2) Utilizando los conocimientos anteriores, demuestre lo siguiente:

$$\bar{a}+\bar{b}=\bar{c} \quad \Leftrightarrow \bar{a}=\bar{c}-\bar{b}$$

3)Los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ satisfacen: $\left|\bar{a}\right| = 4$, $\left|\bar{b}\right| = 3$ y $(\bar{a}\,\hat{}\,\bar{b}) = \frac{\pi}{2}$

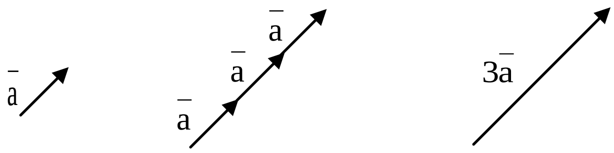
Dibuja los vectores $\bar{a}+\bar{b}$, $\bar{a}-\bar{b}$, $-\bar{a}+\bar{b}$, $-\bar{a}-\bar{b}$.

[Soluciones Actividades IV]

2.3 Producto de un número real por un vector

REFLEXION PREVIA A LA CONSTRUCCION DE UNA DEFINICION.

Dado un vector $\bar{a}\neq\bar{0}$ *si nos piden hallar* $\bar{a}+\bar{a}+\bar{a}$ *dibujaremos un vector como el siguiente*



Parece natural indicar $\bar{a}+\bar{a}+\bar{a}=3\bar{a}$ *y observar que* $3\bar{a}$ *tiene las siguientes características*

- $|3\bar{a}| = 3|\bar{a}|$
- *dirección de* $3\bar{a}$ *es igual a la dirección de* $\bar{a}$
- *el sentido de* $3\bar{a}$ *es el sentido de* $\bar{a}$

Esto nos hace comprender más fácilmente la operación que definiremos a continuación, cuando en lugar de un número natural, como es 3, consideramos cualquier número real α.

Producto de un número real por un vector

Dado un vector $\bar{a}$ y un número real α, se llama producto de α por $\bar{a}$ a un nuevo vector que simbolizamos $\alpha\,\bar{a}$ y que definimos así:

1) si $\alpha \neq 0$ y $\bar{a} \neq \bar{O}$, $\alpha\,\bar{a}$ es tal que:

- *Módulo de* $\alpha\,\bar{a}$: $|\alpha\bar{a}| = |\alpha|\,|\bar{a}|$
- *Dirección de* $\alpha\,\bar{a}$ es igual a la dirección de $\bar{a}$
- *Sentido de* $\alpha\,\bar{a}$ $\begin{cases} \text{igual al sentido de } \bar{a} \text{ si } \alpha > 0 \\ \text{opuesto al de } \bar{a} \text{ si } \alpha < 0 \end{cases}$

2) Si $\alpha = 0 \quad \vee \quad \bar{a} = \bar{0}$ entonces $\alpha\,\bar{a} = \bar{0}$.

ACTIVIDAD V

Dado un vector $\bar{a}$, dibuja $2\bar{a}$; $0{,}5\,\bar{a}$; $-\frac{3}{2}\bar{a}$; $\sqrt{2}\,\bar{a}$

REFLEXION: ¿Qué propiedades podría tener un producto definido entre entes de distinta naturaleza? .O ¿De qué naturaleza sería el producto?

Propiedades del producto de un número real por un vector

$\forall\, \alpha, \beta \in \Re$ y $\forall\, \bar{a}, \bar{b} \in V$ valen:

P1) $\alpha\,\bar{a} \in V$ (homogeneidad).
P2) $\alpha(\bar{a}+\bar{b}) = \alpha\,\bar{a} + \alpha\,\bar{b}$ (distributiva respecto a la suma de los vectores).

P3) $(\alpha + \beta)\bar{a} = \alpha\,\bar{a} + \beta\,\bar{a}$ (distributiva respecto a la suma de nº reales).

P4) $\alpha\,(\beta\,\bar{a}) = (\alpha\,\beta)\,\bar{a}$ (asociativa respecto de los nº reales).

P5) $1\bar{a} = \bar{a}$ (existencia del elemento neutro).

2.4 Versor o vector unitario

Llamamos versor a un vector de módulo uno.

2.5 Versor asociado a un vector no nulo

Sea $\bar{a} \in V$ y $\bar{a} \neq \bar{0}$, se llama versor asociado a un vector $\bar{a}$, al vector que simbolizamos $\bar{a}_0$ y que definimos así:

- $|\,\bar{a}_0\,| = 1$
- dirección de $\bar{a}_0$ es igual a la dirección de $\bar{a}$
- sentido de $\bar{a}_0$ es igual al sentido de $\bar{a}$

ACTIVIDAD VI

1) Comprueba gráficamente las anteriores propiedades del producto de un número real por un vector, para ello fija dos números reales α y β, y dibuja dos vectores cualesquiera $\bar{a}$ y $\bar{b}$; luego (Para facilitar el dibujo considera α y β enteros).

2) Aplicando las propiedades P1, P2, P3, P4, P5 demuestra:

$(-1)\,\bar{a} = -\bar{a}$

$(-\alpha)\bar{a} = -(\alpha\,\bar{a})$

$\alpha\,\bar{a} = \bar{0} \iff \bar{a} = \bar{0} \ \vee\ \alpha = 0$

3) Demuestra que si $\bar{a} \in V$ y $\bar{a} \neq \bar{0}$ entonces $\bar{a}_0$ se puede expresar:

$$\bar{a}_0 = \frac{1}{|\bar{a}|}\,\bar{a}$$

(Ayuda: utiliza las tres características que definen el producto de un número por un vector)

4) Prueba que si $\alpha \neq 0$, $\alpha\,\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} = \frac{1}{\alpha}\,\bar{b}$.

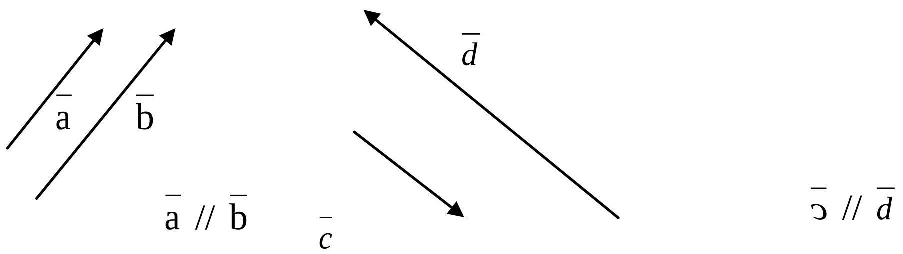
Es decir en una igualdad vectorial los factores numéricos no nulos pasan de un miembro a otro como divisores.

5) Prueba que $\bar{a} = \left|\,\bar{a}\,\right|\,\bar{a}_0$

[Soluciones Actividad VI]

2.6 Vectores paralelos

Convenimos en que dos vectores no nulos son paralelos o colineales (y simbolizamos $\bar{a}\ //\ \bar{b}$) si y sólo si tienen la misma dirección.



ACTIVIDADES VII

1) Dado $\bar{a} = \alpha\,\bar{b}$. Prueba que $\bar{a}\ //\ \bar{b}$.

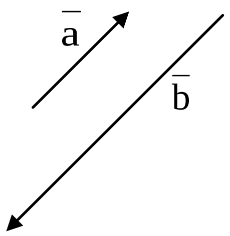
2) Recíprocamente prueba que si $\bar{a} // \bar{b}$ entonces existe un número real α, no nulo tal que esta relación geométrica se puede expresar por una igualdad vectorial: $\bar{a} = \alpha\,\bar{b}$

Ayuda: Descompone para el análisis el problema en las siguientes situaciones

i) $\bar{a} // \bar{b}$ de igual sentido

ii) $\bar{a} // \bar{b}$ de distinto sentido

3) Halla números α y β tales que:



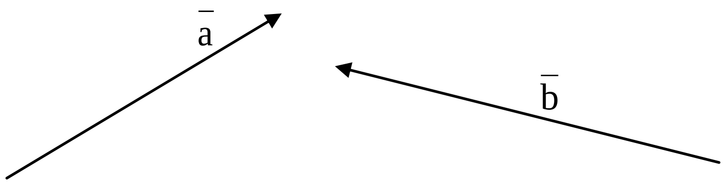
$\left|\,\bar{a}\,\right| = 2$

$\left|\,\bar{b}\,\right| = 4$

$$\overline{a} = \alpha\, \overline{b}$$
$$\overline{b} = \beta\, \overline{a}$$

4) Si $\overline{OP}$ y $\overline{O_1P_1}$ son vectores iguales, situados sobre rectas paralelas no coincidentes, demuestra que los vectores $\overline{OO_1}$ y $\overline{PP_1}$ son también iguales.

5) Si $\overline{a}$ y $\overline{b}$ son los vectores representados en la figura:



Dibuja los siguientes vectores:

a) $\overline{a}+\overline{b}$

b) $\overline{a}-\overline{b}$

c) $\overline{b}-\overline{a}$

d) $2\overline{a}-\frac{1}{3}\overline{b}$

e) $\overline{b}-\sqrt{2}\,\overline{a}$

f) $2\,\overline{a}+\overline{b}$

g) $-\frac{1}{2}\overline{a}+\overline{b}$

h) $-3\overline{a}-\frac{2}{3}\overline{b}$

i) $\overline{a}+\frac{3}{2}\overline{b}$

j) $\overline{c}$ tal que $2\,\overline{a}-\overline{b}+\overline{c}=\overline{\mathbf{O}}$

6) Suponiendo $\overline{a}$ y $\overline{b}$ no nulos y paralelos, considera bajo qué condiciones se verifica que: $\frac{\overline{a}}{|\overline{a}|}=\frac{\overline{b}}{|\overline{b}|}$; $\frac{\overline{a}}{|\overline{a}|}=-\frac{\overline{b}}{|\overline{b}|}$. Explica la respuesta.

[Soluciones Actividades VII]

2.7 Condición de paralelismo entre dos vectores no nulos

En virtud de las propiedades enunciadas en 1) y 2) de las actividades anteriores, podemos decir :

Sean $\bar{a}$ y $\bar{b}$ vectores no nulos:

$$\bar{a} // \bar{b} \Leftrightarrow \exists\ \alpha \in \Re\ ;\ \alpha \neq 0\ /\ \bar{a} = \alpha\, \bar{b}$$

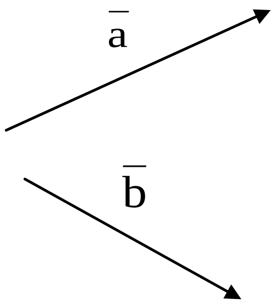
Condición de paralelismo entre dos vectores no nulos

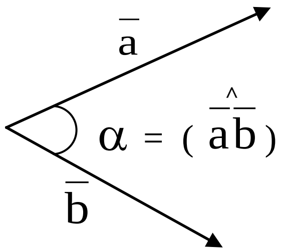
OBSERVACIÓN:

Se acostumbra también a decir que $\bar{a} // \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a}$ es un múltiplo escalar de $\bar{b}$.

2. 8 Angulo entre dos vectores

Sean $\bar{a}$ y $\bar{b}$ vectores no nulos, si es necesario los trasladamos paralelamente a sí mismos, de modo que $\bar{a}$ y $\bar{b}$ tengan un origen común. Se llama ángulo entre $\bar{a}$ y $\bar{b}$ al menor ángulo formado por ambos vectores.





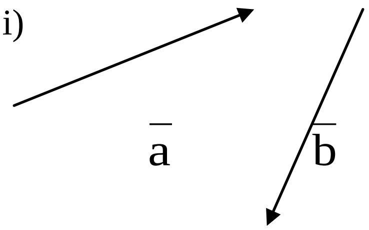
Podemos asegurar que: $0^{\circ} \leq \alpha \leq 180^{\circ}$ (¿Por qué?)

ACTIVIDADES VIII

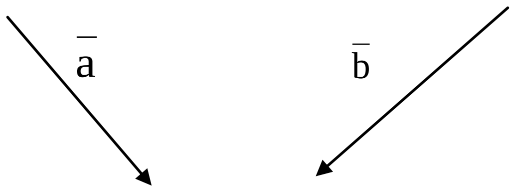
Dados dos vectores paralelos: ¿qué ángulos pueden formar?

Grafica el ángulo que forman los siguientes pares de vectores:

i)



ii)



2.8 Producto escalar

REFLEXION PREVIA A UNA DEFINICION

Hasta este punto hemos definido dos operaciones, la suma y el producto de un número por un vector con determinadas propiedades. Su importancia es tan grande que, cuando es posible definirlas en otros conjuntos de entes, determinan también en los mismos una estructura que llamamos "espacio vectorial", de la que los vectores geométricos, que estamos tratando, permiten una visualización.

En el punto siguiente definiremos una operación que, a primera vista, nos parecerá insólita porque hace corresponder a dos vectores un resultado que no es un vector !!!. No obstante su utilidad es extraordinaria precisamente porque será herramienta para poder obtener distancias entre puntos y ángulo entre vectores, rectas, planos, etc. A su vez ese concepto definido en un espacio vectorial, permitirá definir otra estructura con un inmenso campo de aplicaciones: el espacio euclídeo. Todas estas estructuras son formidables herramientas en la Matemática para Ingenieros.

Producto Escalar

Dados dos vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$, se llama producto escalar o interno de $\bar{a}$ por $\bar{b}$ y se indica $\bar{a}\,.\,\bar{b}$ al número real que se define así:

1) si $\bar{a} \neq \bar{0}$ y $\bar{b} \neq \bar{0}$

$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}| \cos\alpha$, donde α es el ángulo que forman $\bar{a}$ y $\bar{b}$ con $0° \leq \alpha \leq 180°$

2) si $\bar{a} = \bar{0} \vee \bar{b} = \bar{0}$

$$\bar{a}\,.\,\bar{b} = 0$$

Propiedades del producto escalar

$\forall\ \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in V,\ \forall \lambda \in \Re$ valen:

P1) $\bar{a}\ .\ \bar{b} = \bar{b}\ .\ \bar{a}$ (conmutativa)

P2) $\lambda\ (\bar{a}\ .\ \bar{b}) = (\lambda\,\bar{a})\ .\ \bar{b} = \bar{a}\ .\ (\lambda\,\bar{b})$

P3) $\bar{a}\ .\ (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a}\,.\,\bar{b} + \bar{a}\,.\,\bar{c}$ (distributiva respecto de vectores)

P4) $\bar{a}\ .\ \bar{a} \geq 0$ y $\bar{a}\ .\ \bar{a} = 0 \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{0}$

ACTIVIDAD IX

1) Demuestra las propiedades P1, P2 y P4 (Ayuda: en la demostración de P2 considera dos casos según el signo de α)

Si α = 0 ¿es válida la propiedad P2?

[Soluciones Actividad IX]

Hasta este momento el módulo de un vector y el ángulo entre vectores han estado vinculados sólo a un proceso de medición directa.

Con las siguientes propiedades brindamos otras expresiones analíticas del módulo y del ángulo que pueden ser útiles en el manejo simbólico que se necesita para resolver algunos problemas.

Propiedades inmediatas de la definición del producto escalar

Propiedad 1: $\forall\ \bar{a} \in V:\ \bar{a}\ .\bar{a}\ = |\bar{a}|^2$

Propiedad 2: "Cálculo del módulo de un vector".

$\forall\ \bar{a} \in V:\ |\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}.\bar{a}}$

Propiedad 3: "Cálculo del ángulo entre vectores no nulos".

Si α es el ángulo que forman los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ no nulos entonces

$$\cos\alpha = \frac{\bar{a}.\bar{b}}{|\bar{a}|\,|\bar{b}|}$$

ACTIVIDAD X

1) Demuestra aplicando las correspondientes definiciones, la Propiedad 1 y la Propiedad 2 .

2) Calcula los siguientes productos escalares para $|\bar{a}| = 9$; $|\bar{b}| = \frac{2}{5}$ y el ángulo entre $\bar{a}$ y $\bar{b}$ es $\alpha = \frac{\pi}{3}$

a) $\bar{a}\ .\ (\frac{1}{6}\ \bar{b}\ )$ c) $(\bar{a} + \bar{b})\ .\ \bar{a}$ e) $5\bar{a}\ .\ (-\ \frac{2}{3}\ \bar{b})$

b) $\bar{a} \cdot \bar{a}$ d) $\bar{b} \cdot \bar{b}$

3) Demuestra que:

a) $|\bar{a} + \bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2 + 2\bar{a}.\bar{b} + |\bar{b}|^2$

b) $|\bar{a} - \bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2 - 2\bar{a}.\bar{b} + |\bar{b}|^2$

[Soluciones Actividad X]

2.9 Perpendicularidad entre dos vectores no nulos

Sean $\bar{a}$ y $\bar{b}$, vectores no nulos, diremos que $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son perpendiculares, y simbolizaremos $\bar{a} \perp \bar{b}$, si el ángulo entre ellos es recto ($\alpha = 90^\circ$).

PROPIEDAD:

Sean $\bar{a}$ y $\bar{b}$ vectores no nulos: $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son perpendiculares sí y sólo si $\bar{a}.\bar{b} = 0$.	**Condición de Perpendicularidad entre dos vectores no nulos**

ACTIVIDAD XI

1) Demuestra la condición anterior

OBSERVACIÓN:

$$\bar{a} \text{ y } \bar{b} \text{ con colineales o paralelos} \Leftrightarrow \alpha = \bar{a} \,\hat{}\, \bar{b} = \begin{cases} 0^\circ \\ \text{o} \\ 180^\circ \end{cases}$$

(Ayuda: ver ejercicio 1) de la Actividad VIII)

2) Si el producto escalar de dos vectores es igual a cero, ¿qué se puede afirmar sobre los vectores?

[Soluciones Actividad XI]

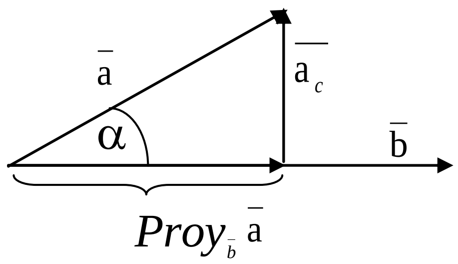
2.10 Vector Proyección

REFLEXIÓN PREVIA A UNA DEFINICIÓN

En el punto que trataremos a continuación definiremos geométricamente el vector proyección. Luego en varios pasos obtendremos una expresión vectorial utilizando las operaciones y propiedades definidas hasta el momento. Solicitaremos una justificación de cada igualdad que se plantee .Las preguntas que se formulan son las naturales de una mente que no acepta lo que no entiende, pero además de formativas, son un anticipo del tipo de preguntas que se harán en la evaluación de los conceptos adquiridos. Si no se pueden contestar es indispensable trabajar con más profundidad.

En cuanto a sus aplicaciones , son variadísimas. Por ejemplo una de sus expresiones vectoriales se utiliza para la construcción de una base ortonormal en los espacios n-dimensionales que se estudiarán en etapas posteriores.

Sean $\bar{a}$ y $\bar{b}$ dos vectores y $\bar{b}$ no nulo. Si $\bar{a}$ también es no nulo, siempre es posible llevarlos a un origen común. Al vector que queda determinado por el origen y el pie de una perpendicular trazada desde el extremo de $\bar{a}$, lo llamaremos vector proyección de $\bar{a}$ sobre $\bar{b}$, y lo simbolizaremos $Proy_{\bar{b}}\,\bar{a}$.



El vector $\bar{a}$ se puede descomponer en forma única en la suma de dos vectores que cumplen las siguientes condiciones:

1) $Proy_{\bar{b}}\,\bar{a}$ vector colineal con $\bar{b}$

2) $\overline{a_c}$ ortogonal a $\bar{b}$

Con el objeto de obtener una expresión del vector proyección en términos de $\bar{a}$ y $\bar{b}$, vamos a trabajar sobre esta suma que surge del gráfico

$\bar{a} = Proy_{\bar{b}}\,\bar{a} + \bar{a}_c$

Pero $Proy_{\bar{b}}\,\bar{a} = \lambda\,\bar{b}$ ¿Por qué? ¿Cómo determinar λ ?

Observando la figura vemos que $\bar{a} = \lambda\, \bar{b} + \bar{a}_c$, y recordemos además, la equivalencia : $\bar{a}_c . \bar{b} = 0 \Leftrightarrow \bar{a}_c \perp \bar{b}$

En este punto consideraremos un producto escalar que nos permitirá vincular los datos que tenemos y obtener una expresión vectorial del vector proyección

$$\bar{a}.\bar{b} = (Proy_{\bar{b}}\, \bar{a} + \bar{a}_c\,) . \bar{b} \; (*)$$

$$\bar{a}.\bar{b} = (Proy_{\bar{b}}\, \bar{a} + \bar{a}_c\,) . \bar{b} = (\lambda \bar{b} + \bar{a}_c) . \bar{b} = \lambda \bar{b}.\bar{b} + \bar{a}_c . \bar{b} = \lambda (\bar{b}.\bar{b}) + 0 = \lambda\, |\, \bar{b}\,|^2$$

¿Qué propiedades se han aplicado en cada una de las igualdades anteriores ?

Reemplazando ahora en la igualdad (*) nos queda:

$\bar{a}.\bar{b} = \lambda \left|\bar{b}\right|^2$, luego $\lambda = \dfrac{\bar{a}.\bar{b}}{\left|\bar{b}\right|^2}$ ¿por qué puedo hacer este pasaje de factor? Y.....qué obtuve finalmente?

$$Proy_{\bar{b}}\, \bar{a} = \frac{\bar{a}.\bar{b}}{\left|\bar{b}\right|^2}\, \bar{b} = \frac{\bar{a}.\bar{b}}{\left|\bar{b}\right|} \frac{\bar{b}}{\left|\bar{b}\right|} = (\bar{a} . \bar{b}_0)\, \bar{b}_0$$

¡La expresión vectorial del vector proyección, objeto de búsqueda!

Al número $\dfrac{\bar{a}.\bar{b}}{\left|\bar{b}\right|}$ se lo llama componente escalar del vector proyección de $\bar{a}$ en la dirección de $\bar{b}$.

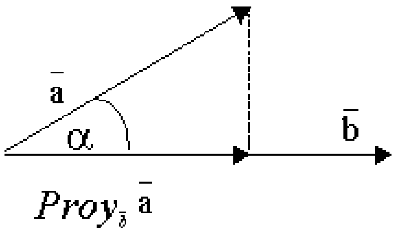
Luego $\boxed{Proy_{\bar{b}}\, \bar{a} = (\bar{a} . \bar{b}_0)\, \bar{b}_0}$

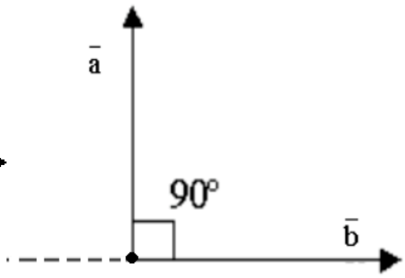
A partir de la expresión anterior se obtiene una nueva expresión vectorial vinculada ahora al ángulo entre los vectores dados.

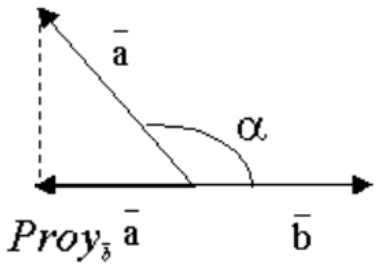
$$Proy_{\bar{b}}\, \bar{a} = (|\,\bar{a}\,| . |\,\bar{b}_0\,| . \cos\alpha)\, \bar{b}_0 = (|\,\bar{a}\,| . \cos\alpha) . \bar{b}$$

¿por qué? ¿qué paso algebraico se hizo para obtener esta expresión? ¿Qué nos dice en relación al ángulo que forman los vectores dados y el sentido del vector proyección?

$0 \leq \alpha < \pi/2$ | $\alpha = \pi/2$ | $\pi/2 < \alpha \leq \pi$







Sentido de $\mathrm{Pr}oy_{\bar{b}}\bar{\mathrm{a}}$ igual al sentido de $\bar{b}$

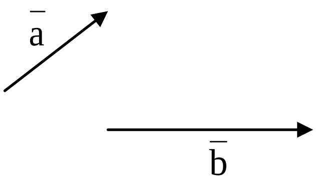
$\mathrm{Pr}oy_{\bar{b}}\bar{\mathrm{a}} = \bar{0}$ ($\bar{\mathrm{a}}$ y $\bar{\mathrm{b}}$ perpendiculares)

Sentido de $\mathrm{Pr}oy_{\bar{b}}\bar{\mathrm{a}}$ opuesto al sentido de $\bar{b}$

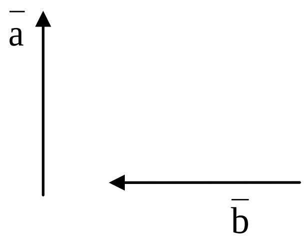
ACTIVIDADES XII

1) Dibuja el vector proyección de $\bar{\mathrm{a}}$ sobre $\bar{\mathrm{b}}$ en los siguientes casos:

a)

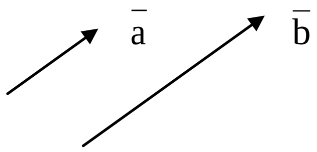


d)

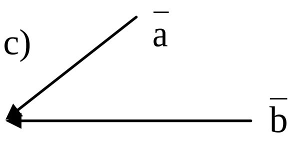


b)

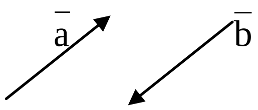
e)



c)



f)



2) Si la componente escalar del vector proyección de $\bar{\mathrm{a}}$ sobre $\bar{\mathrm{b}}$ es $\sqrt{\mathbf{2}}$ y el módulo de $\bar{\mathrm{a}}$ es 2, ¿ qué ángulo forman $\bar{\mathrm{a}}$ y $\bar{\mathrm{b}}$?

3) Repetir el ejercicio 1º hallando $Proy_{\bar{\mathrm{a}}}\,\bar{\mathrm{b}}$

4) Si $|\overline{a}| = \frac{3}{2}$, $|\overline{b}| = 5$ y $(\overline{a},\overline{b}) = \frac{\pi}{3}$

Dibuja y expresa vectorialmente:

a) la proyección de $2\overline{a} - \frac{1}{4}\overline{b}$ sobre la dirección de $\overline{a}$

b) la proyección de $\frac{3}{5}\overline{a} + 4\overline{b}$ sobre la dirección de $\overline{b}$

[Soluciones Actividades XII]

3 EL VECTOR EN COMPONENTES

REFLEXIONES PREVIAS A LA CONSTRUCCION DE UN NUEVO CONCEPTO.

Al seguir trabajando con vectores en la forma geométrica, se podría pensar en las dificultades de reducción de escalas, que se presentan para sumar o restar vectores cuyos módulos sean de gran longitud o en las imprecisiones de las mediciones de ángulos que determinan la dirección de un vector.

Veremos a continuación una propiedad casi mágica que permitirá trabajar con los vectores en otra forma. En lugar de necesitar instrumentos de medición para fijar el módulo o el ángulo de dirección, necesarios para determinar un vector, se podrá directamente expresarlo por un conjunto ordenado de números.

Hasta ahora hemos estudiado el conjunto V de todos los vectores geométricos, con sus operaciones y propiedades generales, sin especificar si se consideraban en una recta, en el plano o en el espacio. En el punto siguiente caracterizaremos los vectores según sea el espacio geométrico al que pertenecen.

Al sustituir elementos geométricos (en una recta, en el plano o en el espacio) por los conjuntos de números que los representan, se puede operar con los vectores cualesquiera sean su longitud, dirección y sentido sin recurrir a traslaciones o mediciones. Bastará operar numéricamente con la calculadora.

Esta nueva concepción será útil en la ingeniería donde los vectores modelizan, generalmente, grandes conjuntos ordenados de datos con los que se opera en diversas situaciones.

Todo esto orienta la nueva visión de los vectores que presentaremos enseguida.

3.1 Vectores en una recta, en el plano y en el espacio

Con vista a las aplicaciones repararemos en determinadas situaciones particulares y llamaremos con:

V_1={ vectores de una recta}

V_2={ vectores en el plano}

V_3={ vectores del espacio}

Recordaremos también las siguientes definiciones:

a) $\Re^1 = \Re$

b) $\Re^2 = \{(x, y) / x \in \Re \wedge y \in \Re\}$

c) $\Re^3 = \{(x, y, z) / x \in \Re, y \in \Re, z \in \Re\}$

Los elementos de $\Re^1$ son simplemente números reales y a los de $\Re^2$ y $\Re^3$ los llamaremos, respectivamente, pares y ternas ordenadas de números reales.

Para poder expresar cualquier vector de otra forma, ya sea en la recta, en el plano o en el espacio, sería muy útil referirlo a vectores especiales que cumplan condiciones convenientes. Esta idea ya ha sido manejada en la escuela media cuando se descomponía una fuerza en otras dos.

A continuación, presentaremos los vectores que permiten expresar cualquier vector del espacio al que pertenecen en función de ellos mismos. Estos vectores se pueden considerar como generadores y sus características quedan determinadas en las definiciones que se presentan.

3.2 Bases ortogonales o canónicas

Se llama base canónica ...

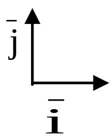
a) en V_1 a cualquier conjunto constituido por un versor.
b) en V_2 a cualquier conjunto de dos versores perpendiculares.
c) en V_3 a cualquier conjunto ordenado de 3 versores perpendiculares dos a dos.

Habitualmente para estos versores se utiliza la siguiente notación : $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$

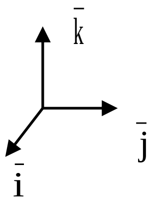
Ejemplos:

En V_1 B={ $\bar{i}$ }

En V_2 B={ $\bar{i}$, $\bar{j}$ }



En V_3 B={ $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ }



ACTIVIDAD XIII

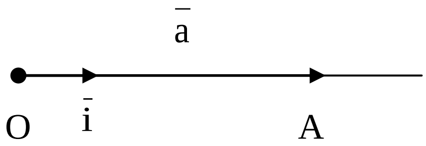
Calcula:

a) $\bar{i}\,.\,\bar{i}$
b) $\bar{i}\,.\,\bar{j}$
c) $\bar{i}\,.\,\bar{k}$
d) $\bar{j}\,.\,\bar{i}$
e) $\bar{j}\,.\,\bar{j}$
f) $\bar{j}\,.\,\bar{k}$
g) $\bar{k}\,.\,\bar{i}$
h) $\bar{k}\,.\,\bar{j}$
i) $\bar{k}\,.\,\bar{k}$

[Soluciones Actividad XIII]

3.3 Descomposición de un vector en función de los vectores de una base

PROPIEDAD 1: Sea $\{\bar{i}\}$ una base canónica en V_1 entonces:



$\overline{OA} = \bar{a}$

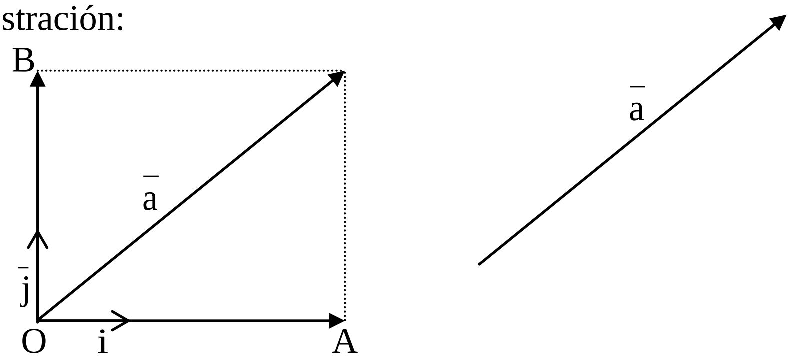
$\forall\ \bar{a} \in V_1$ existe un único número real a_1 tal que $\bar{a} = a_1 \bar{i}$ (por condición de paralelismo) y recíprocamente.

Cualquier vector de una recta se puede expresar en función del vector de la base.

PROPIEDAD 2: Sea $\{\bar{i}, \bar{j}\}$ una base canónica en V_2 entonces:

$\forall\ \bar{a} \in V_2$ existen dos únicos números reales a_1, a_2 tales que $\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j}$ y recíprocamente.

Demostración:



Sea $\bar{a} \in V_2$ cualquiera. Es posible trasladarlo paralelamente a sí mismo hasta que su origen coincida con O. Entonces es claro que: $\bar{a} = \overline{OA} + \overline{OB}$

$\overline{OA}$ tiene la dirección de $\bar{i} \Rightarrow \overline{OA} = a_1\, \bar{i}$; $a_1 \in \Re$, $a_1 \neq 0$ condición de paralelismo

$\overline{OB}$ tiene la dirección de $\bar{j} \Rightarrow \overline{OB} = a_2\, \bar{j}$; $a_2 \in \Re$, $a_2 \neq 0$ condición de paralelismo

Reemplazando: $\bar{a} = a_1\, \bar{i} + a_2\, \bar{j}$

Casos particulares:

Si fuese $\bar{a} \,//\, \bar{i} \Rightarrow \bar{a} = a_1\, \bar{i}$ con $a_1 \in \Re$, $a_1 \neq 0 \Rightarrow \bar{a} = a_1\, \bar{i} + 0\, \bar{j}$

Si fuese $\bar{a} \,//\, \bar{j} \Rightarrow \bar{a} = a_2\, \bar{j}$ con $a_2 \in \Re$, $a_2 \neq 0 \Rightarrow \bar{a} = 0\, \bar{i} + a_2\, \bar{j}$

Si $\bar{a} = \bar{0} \Rightarrow \bar{0} = 0\,\bar{i} + 0\,\bar{j}$

Entonces:

$\forall\ \bar{a} \in V_2,\ \bar{a} = a_1\,\bar{i} + a_2\,\bar{j}$ con $a_1, a_2 \in \Re$ y queda probada la propiedad 2

OBSERVACION 1: La unicidad de esta descomposición surge de las propiedades geométricas que entran en juego en la construcción geométrica realizada.

OBSERVACION 2: La propiedad anterior se puede expresar diciendo que $\bar{a}$ es una única **combinación lineal** de los vectores $\bar{i}$ y $\bar{j}$ con a_1 y a_2 coeficientes.

PROPIEDAD 3: Sea $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ una base canónica en V_3 entonces

$\forall\ \bar{a} \in V_3$; existen tres únicos números reales a_1, a_2, a_3 tales que $\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$ y recíprocamente

3.4 Componentes de un vector en el plano y en el espacio

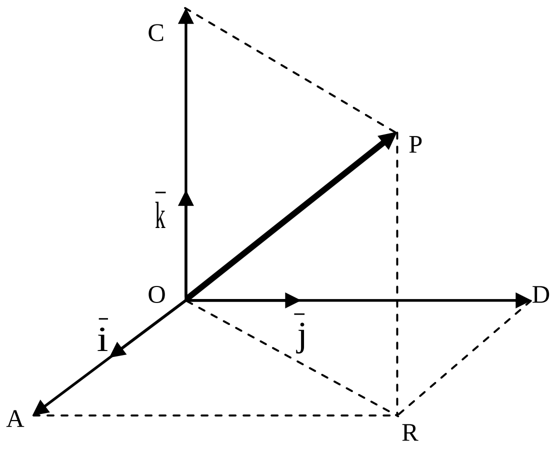
Los números a_1, a_2 se llaman respectivamente la primera y segunda componente escalar de $\bar{a}$ en la base B={$\bar{i}$, $\bar{j}$}. Los vectores $a_1\bar{i}$, $a_2\bar{j}$ son respectivamente la primeras y segundas componentes vectoriales de $\bar{a}$.

Los números a_1, a_2, a_3 se llaman respectivamente la primera, segunda y tercera componente escalar de $\bar{a}$ en la base B={$\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$}. Los vectores $a_1\bar{i}$, $a_2\bar{j}$ y $a_3\bar{k}$ son respectivamente la primera, segunda y tercera componente vectorial de $\bar{a}$.

ACTIVIDAD XIV

1) Realiza una demostración análoga a la anterior para la situación de descomposición de un vector en V_3 y definir las componentes escalares y vectoriales de $\bar{a}$ en la base B={$\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$}.

Ayuda:



Observa que: $\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AR} + \overline{RP}$

2) a) Representa geométricamente el vector $\bar{a}$, dado por sus componentes, en la base B={$\bar{i}$, $\bar{j}$}, en los siguientes casos:

$a_1 = 5$; $a_2 = -4$ $\quad$ $a_1 = 0$; $a_2 = 5$

$a_1 = 2$; $a_2 = -3$ $\quad$ $a_1 = -3$; $a_2 = 0$

$a_1 = -1$; $a_2 = -2$

b) Representa geométricamente el vector $\bar{a}$,dado por sus componentes, en la base B={$\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$}, en los siguientes casos:

$a_1 = 3$; $a_2 = 5$; $a_3 = 7$	$a_1 = -2$; $a_2 = -3$; $a_3 = 7$	$a_1 = 0$; $a_2 = 0$; $a_3 = 7$
$a_1 = 3$; $a_2 = 5$; $a_3 = 0$	$a_1 = -2$; $a_2 = 3$; $a_3 = 7$	$a_1 = 0$; $a_2 = 0$; $a_3 = 7$
$a_1 = 3$; $a_2 = 0$; $a_3 = 7$	$a_1 = 0$; $a_2 = 5$; $a_3 = -7$	$a_1 = 0$; $a_2 = 5$; $a_3 = 0$
$a_1 = 0$; $a_2 = 5$; $a_3 = 7$	$a_1 = -3$; $a_2 = 0$; $a_3 = -7$	$a_1 = -3$; $a_2 = 0$; $a_3 = 0$
$a_1 = -3$; $a_2 = 0$; $a_3 = 7$		

3) Dada la base {$\bar{i}$, $\bar{j}$} dibuja un vector $\bar{a} = a_1\,\bar{i} + a_2\,\bar{j}$ con $a_1, a_2 \in \Re$ en los siguientes casos :

a) $a_1 > 0 \wedge a_2 > 0$ $\quad$ d) $a_1 < 0 \wedge a_2 = 0$ $\quad$ f) $a_1 = 0 \wedge a_2 < 0$

b) $a_1 = 0 \wedge a_2 > 0$ $\quad$ e) $a_1 < 0 \wedge a_2 < 0$ $\quad$ g) $a_1 > 0 \wedge a_2 < 0$

c) $a_1 < 0 \wedge a_2 > 0$ $\quad$ h) $a_1 > 0 \wedge a_2 = 0$

4) Imagina la base {$\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$} en una esquina del salón y posiciona mentalmente el vector $\bar{a}$ en las siguientes situaciones.

1) $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$ $\quad$ 4) $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 < 0$

2) $a_1 < 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$ $\quad$ 5) $a_1 > 0$, $a_2 < 0$, $a_3 < 0$

3) $a_1 > 0$, $a_2 < 0$, $a_3 > 0$ $\quad$ 6) $a_1 < 0$, $a_2 < 0$, $a_3 < 0$

Ayuda: Puedes acompañar las posiciones del vector pensando en tu propio brazo extendido siguiendo la dirección y sentido de los distintos vectores, con el hombro como origen.

5) Pensando en $\bar{a} = a_1\,\bar{i} + a_2\,\bar{j} + a_3\,\bar{k}$, describe la posición del vector respecto de los vectores de la base en las siguientes situaciones:

i) $a_3 = 0$
ii) $a_2 = 0$
iii) $a_1 = 0$
iv) $a_1 = 0 \quad \wedge \quad a_2 = 0$
v) $a_2 = 0 \quad \wedge \quad a_3 = 0$
vi) $a_3 = 0 \quad \wedge \quad a_1 = 0$

6) Halla las componentes escalares en $\Re^3$ de cada uno de los versores $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

[Soluciones Actividad XIV]

3.5 Correspondencia biunívoca fundamental

En virtud de las propiedades anteriores es posible establecer las siguientes relaciones:

Dada $\{\bar{i}\}$ una base canónica en V_1 : $\quad V_1 \longleftrightarrow \Re^1$

$$\bar{a} \longleftrightarrow a_1$$

Dada $\{\bar{i}, \bar{j}\}$ una base canónica en V_2: $\quad V_2 \longleftrightarrow \Re^2$

$$\bar{a} \longleftrightarrow (a_1, a_2)$$

Dada $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ una base canónica en V_3: $\quad V_3 \longleftrightarrow \Re^3$

$$\bar{a} \longleftrightarrow (a_1, a_2, a_3)$$

OBSERVACIÓN

Esta correspondencia biunívoca fundamental, se aplica en la simplificación de la notación:

$\bar{a} = a_1\,\bar{i} + a_2\,\bar{j}$ se puede escribir $\bar{a} = (a_1, a_2)$

$\bar{a} = a_1\,\bar{i} + a_2\,\bar{j} + a_3\,\bar{k}$ se puede escribir $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$

3.6 Igualdad de dos vectores en componentes

Dados los vectores $\bar{a} = (a_1,a_2)$ y $\bar{b} = (b_1,b_2)$, podemos decir que

$$\bar{a} = \bar{b} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$$

Igualmente en el espacio, dados $\bar{a} = (a_1,a_2,a_3)$ y $\bar{b} = (b_1,b_2,b_3)$, es

$$\bar{a} = \bar{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$$

3.7 Operaciones con vectores en componentes

REFLEXIÓN

Si se pudiesen extender las operaciones y propiedades de los vectores geométricos, en virtud de la correspondencia biyectiva que hemos demostrado entre vectores geométricos y las componentes de esos vectores, podríamos operar más fácilmente con vectores y nos olvidaríamos de los problemas del dibujo !

ACTIVIDAD XV

Dado $\bar{a} = (3,2)$ $\bar{b} = (1,4)$ en una base $\{\bar{i}, \bar{j}\}$ halla gráficamente $\bar{a} + \bar{b}$.

El vector $\bar{a} + \bar{b}$ está aplicado en el origen de los vectores de la base, observa en el dibujo y expresa cuales son sus componentes vectoriales y escalares.

¿Qué se podría haber anticipado sobre este resultado, sin utilizar recursos gráficos ?

En respuesta a esta interrogación se presenta a continuación una traducción de las definiciones y propiedades de las operaciones con vectores, como flechas, al lenguaje de los números, es decir al vector en componentes. Esto permitirá trabajar con más rapidez y exactitud.

Se tendrán también que demostrar estas propiedades (no son decretos ni definiciones) utilizando la correspondencia biunívoca demostrada y las propiedades que aceptamos o demostramos en forma geométrica.

3.8 Propiedades del vector en componentes que generalizan las definiciones de operaciones y propiedades del vector geométrico.

Sea $\bar{a}=(a_1, a_2)$, $\bar{b}=(b_1, b_2)$ y $\alpha \in \Re$, entonces:

i) $\bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

ii) $\alpha\, \bar{a} = (\alpha\, a_1, \alpha\, a_2)$

iii) $\bar{a}.\bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

iv) $|\bar{\mathbf{a}}| = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2}}$

v) $\bar{a}_0 = \left(\dfrac{a_1}{|\bar{a}|}, \dfrac{a_2}{|\bar{a}|} \right)$

vi) $\bar{a} \| \bar{b} \Leftrightarrow \exists \alpha \in \Re \begin{cases} a_1 = \alpha b_1 \\ a_2 = \alpha b_2 \end{cases}$

ACTIVIDAD XVI

1) Demuestra las propiedades enunciadas en el punto anterior justificando cada paso. (Ayuda: Utiliza las definiciones y propiedades del vector definido en forma geométrica)
Extiende el resultado a vectores en el espacio.
Damos como ejemplo la demostración de la propiedad iii) extendida al espacio:

$$\bar{a} . \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Demostración:

Dados $\bar{a}$ y $\bar{b}$ vectores en el espacio, su descomposición en los vectores de la base $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ es $\bar{a} = a_1 \bar{i} + a_2 \bar{j} + a_3 \bar{k}$ y $\bar{b} = b_1 \bar{i} + b_2 \bar{j} + b_3 \bar{k}$. Luego se tiene:

$$\bar{a} . \bar{b} = (a_1 \bar{i} + a_2 \bar{j} + a_3 \bar{k}) . (b_1 \bar{i} + b_2 \bar{j} + b_3 \bar{k})$$

En el segundo miembro se aplica la propiedad distributiva del producto escalar:

$$\bar{a} . \bar{b} = a_1 \bar{i} . b_1 \bar{i} + a_1 \bar{i} . b_2 \bar{j} + a_1 \bar{i} . b_3 \bar{k} + a_2 \bar{j} . b_1 \bar{i} + a_2 \bar{j} . b_2 \bar{j} +$$

$a_2 \bar{j} . b_3 \bar{k} + a_3 \bar{k} . b_1 \bar{i} + a_3 \bar{k} . b_2 \bar{j} + a_3 \bar{k} . b_3 \bar{k}$

Le aplico a continuación la propiedad asociativa del producto de un número por un vector:

$$\bar{a} . \bar{b} = a_1 b_1 (\bar{i} . \bar{i}) + a_1 b_2 (\bar{i} . \bar{j}) + a_1 b_3 (\bar{i} . \bar{k}) + a_2 b_1 (\bar{j} . \bar{i}) + a_2 b_2 (\bar{j} . \bar{j}) + a_2 b_3 (\bar{j} . \bar{k}) + a_3 b_1 (\bar{k} . \bar{i}) + a_3 b_2 (\bar{k} . \bar{j}) + a_3 b_3 (\bar{k} . \bar{k})$$

Teniendo en cuenta los resultados de la ACTIVIDAD XIII, se tiene:

$$\bar{a} . \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

2) Dados $\bar{a}$ = (2, -6, 3) y $\bar{b}$ = (3, -4, 0) halla:

a) $\bar{a} + \bar{b}$

b) $\bar{a} - \bar{b}$

c) $3\bar{a}$

d) $\bar{a}_0$

e) $\cos (\widehat{\bar{a}\ \bar{b}})$

f) $Proy_{\bar{a}}\ \bar{b}$

3) Verifica los resultados numéricos obtenidos en el ejercicio anterior operando con las representaciones gráficas de los vectores.

4) Sean $\bar{a}$ = (1,-1,3) y $\bar{b}$ = (0,3,-4), determina las componentes y los módulos de los vectores:

$$\frac{1}{2}\bar{a} - 3\bar{b} \quad , \quad 2\bar{a} + \frac{3}{4}\bar{b}$$

5) Sea $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ tal que $|\bar{a}| = 13$, $a_1 = 3$ y $a_2 = 4$

a) Calcula a_3

b) ¿Hay solución única?

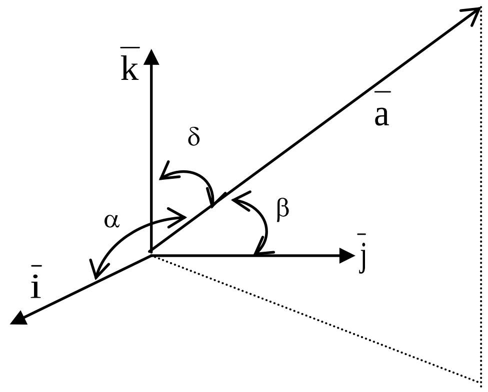
6) Determina el número x para que el vector $\bar{a}$ = (1,x) sea perpendicular al vector $\bar{b}$ = (2,5)

7)Ya estás en condiciones de resolver el problema introductorio. Inténtalo.

4	**COSENOS DIRECTORES DE UN VECTOR**

4.1 Definición

Los cosenos directores de un vector $\overline{a}$, no nulo son los números cos α , cos β, cos δ donde α , β y δ son los ángulos entre el vector dado y cada uno de los vectores de la base y se llaman ángulos directores.



ACTIVIDAD XVII

1) Demuestra la llamada relación fundamental:

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\delta = 1}$$

Ayuda: Considera $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$

α es el ángulo que forma $\overline{i}$ con $\overline{a}$

β es el ángulo que forma $\overline{j}$ con $\overline{a}$

δ es el ángulo que forma $\overline{k}$ con $\overline{a}$

Y teniendo en cuenta las propiedades del producto escalar, que permiten expresar vectorialmente el coseno del ángulo de dos vectores:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{a}.\overline{i}}{|\overline{a}||\overline{i}|} = \frac{(a_1, a_2, a_3).(1,0,0)}{|\overline{a}|} = \frac{a_1}{|\overline{a}|}$$

$$\cos\beta = \frac{a_2}{|\overline{a}|} \qquad \text{y} \qquad \cos\delta = \frac{a_3}{|\overline{a}|}$$

2) i) Dibuja un vector en el plano, en distintas posiciones, señala los ángulos que forma con los vectores de la base. y demuestra en el plano la relación, funda-

mental. ¿podrías haber llegado a la misma conclusión por una identidad trigonométrica?

ii) El mismo ejercicio realizado con vectores ubicados en la dirección de los versores de la base.

3) Verifica la relación fundamental en cada uno de lo vectores:
$\bar{a} = (3,-3)$ y $\bar{b} = (3, 4)$

PROPIEDAD

Los cosenos directores de un vector son las componentes escalares de su versor asociado.

ACTIVIDAD XVIII

1) Demuestra la propiedad anterior
2) Analiza si $\bar{a}$ puede formar con los versores $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, los siguientes ángulos:

i) $\left[\widehat{\bar{a}\,\bar{i}}\right] = 45^o$ $\left[\widehat{\bar{a}\,\bar{j}}\right] = 135^o$ $\left[\widehat{\bar{a}\,\bar{k}}\right] = 60^o$

ii) $\left[\widehat{\bar{a}\,\bar{i}}\right] = 90^o$ $\left[\widehat{\bar{a}\,\bar{j}}\right] = 150^o$ $\left[\widehat{\bar{a}\,\bar{k}}\right] = 60^o$

3) Halla las componentes de $\bar{a}$ sabiendo que : $|\bar{a}| = 3$, $\bar{a}$ es colineal con

$\bar{b} = (1, -2, -6)$ y forma un ángulo agudo con $\bar{i}$.

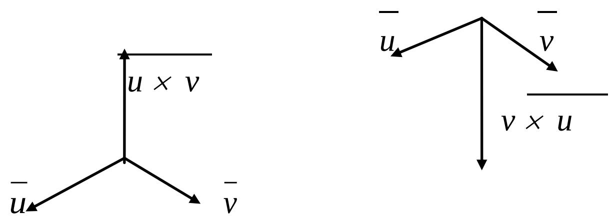
5 Producto Vectorial

5.1Definición

Dados dos vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$, no nulos, en R 3 , se define como producto vectorial entre u y $\bar{v}$ ó producto cruz entre $\bar{u}$ y $\bar{v}$, que notaremos: $\bar{u} \times \bar{v}$ a otro VECTOR que verifica:

dirección de $\bar{u} \times \bar{v}$: perpendicular al plano determinado por $\bar{u}$ y $\bar{v}$.

sentido de $\bar{u} \times \bar{v}$: depende de la orientación de la terna $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{u} \times \bar{u}$.



La orientación de la terna ($\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{u} \times \bar{v}$) es opuesta a la ($\bar{v}$, $\bar{u}$, $\bar{v} \times \bar{u}$) luego, los vectores $\bar{u} \times \bar{v}$ y $\bar{v} \times \bar{u}$ serán opuestos.

módulo de $\bar{u} \times \bar{v}$: $|\bar{u} \times \bar{v}| = |\bar{u}|\ |\bar{v}|$ sen($\bar{u} \wedge \bar{v}$)

Propiedades

P1) $\bar{u} \times \bar{v} \neq \bar{v} \times \bar{u} \Rightarrow$ el producto vectorial no es conmutativo.

P2) $\bar{u} \times \bar{v} = -(\bar{v} \times \bar{u})$

P3) $\alpha\, \bar{u} \times \bar{v} = \alpha\,(\bar{u} \times \text{v})$

P4) $\bar{u} \times \bar{v} = o \not\Rightarrow \bar{u} = \bar{0}$ ó $\bar{v} = \bar{0}$

Demostración

Si $\bar{u} \neq \bar{0}$ y $\bar{v} \neq \bar{0}$ entonces $|\bar{u} \times \bar{v}| = |\bar{u}|\,|\bar{v}|$ sen($\bar{u} \wedge \bar{v}$) = 0

> 0 $\qquad$ > 0

para verificar la igualdad deberá ser sen($\bar{u} \wedge \bar{v}$) = 0 $\Rightarrow$ ($\bar{u} \wedge \bar{v}$) = 0 ó ($\bar{u} \wedge \bar{v}$) = $\pi \Rightarrow$ $\bar{u} \,//\, \bar{v}$

De aquí la condición necesaria y suficiente de paralelismo de dos vectores en el espacio es que $|\bar{u} \times \bar{v}| = 0 \Rightarrow \bar{u} \times \bar{v} = \bar{0}$.

5.2 Cálculo del vector producto vectorial

Dado $\bar{u}$=(u1,u2,u3) y $\bar{v}$=(v1,v2,v3) se prueba que el vector producto vectorial u × v es:

$$\bar{u} \times \bar{v} = \left(\left(u_2 v_3 - u_3 v_2\right), -\left(u_1 v_3 - u_3 v_1\right), \left(u_1 v_2 - u_2 v_1\right) \right)$$

lo que equivale en forma práctica a colocar los vectores por sus componentes formando dos filas y obtener las componentes del vector producto vectorial efectuando para cada componente la diferencia de los siguientes productos:

$$\begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{array}$$

Para la primera componente del vector producto vectorial se "tapa" la primera columna del esquema anterior y se resuelve la diferencia del producto cruzado

$$\begin{array}{|c|cc} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \qquad u_2\, v_3 - u_3\, v_2$$

Para la segunda, se "tapa" la segunda columna del esquema, se resuelve la diferencia del producto cruzado y se coloca como resultado el opuesto del obtenido

$$\begin{array}{c|c|c} u_1 & .... & u_3 \\ v_1 & .... & v_3 \end{array} \qquad -(\, u_1\, v_3 - u_3\, v_1\,)$$

Para la tercera se "tapa" la tercera columna y se procede como en la primera.

$$\begin{array}{cc|c|} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \qquad u_1 v_2 - u_2\, v_1$$

OBSERVACION:
Esta mecánica de trabajo tiene que ver con la teoría de determinantes, tema que oportunamente se desarrollará.

Ejemplo:

Hallar $\bar{u} \times \bar{v}$ y $\bar{v} \times \bar{u}$ siendo $\bar{u}$ = (2,-1,3) y v = (-4,7,-1)

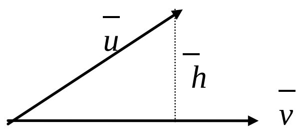
Procediendo de la forma indicada tenemos
$\bar{u} \times \bar{v}$ = [((-1).(-1) - 3.7) , - (2.(-1) - 3.(-4)) , 2.7 - (-1).(-4)] = (-20 , -10 , 10)

El producto vectorial $\bar{v} \times \bar{u}$ = (20,10,-10)

5.3 Interpretación geométrica del módulo del producto vectorial

El módulo del vector producto vectorial es numéricamente igual al área del paralelogramo que tiene por aristas los vectores dados.

Demostración:
Sea u y v dos vectores no paralelos de R 3.



Si pensamos que $\bar{u}$ y v determinan un paralelogramo tenemos:

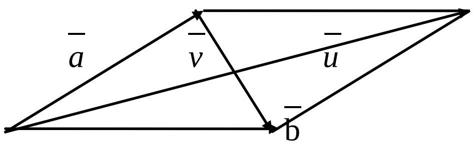
área paralelogramo = b . h   (1)

pero b = | $\bar{v}$ | y h = | $\bar{u}$ | sen($\bar{u} \wedge \bar{v}$), entonces sustituyendo en (1) por sus iguales:

$$\boxed{\textit{área paralelogramo} = |\bar{v}|\,|\bar{u}|\,sen(\bar{u} \wedge \bar{v}) = |\bar{u} \times \bar{v}|}$$

Ejemplo:
Calcular el área del paralelogramo que tiene por diagonales los vectores
$\bar{u}$ = (-1,2,3)   y $\bar{v}$ = (2,1,-1)

Gráficamente



Por suma gráfica de vectores

$$\begin{array}{rl} (1) & \bar{a} + \bar{b} = \bar{u} \\ & -\bar{a} + \bar{b} = \bar{u} \\ \hline & 2\bar{b} = \bar{u} + \bar{v} \Rightarrow \bar{b} = \dfrac{\bar{u} + \bar{v}}{2} \end{array}$$

b = $\dfrac{(-1,2,3) + (2,1,-1)}{2}$ = (1/2,3/2,1)

en (1) $\bar{a}$ = $\bar{u}$ - $\bar{b}$ = (-1,2,3) - (1/2,3/2,1) = (-3/2,1/2,2)

área paralelogramo = | $\bar{a} \times \bar{b}$ | = | (-5/2,5/2,-5/2) | = 5 √ 3 /2

5.4 Producto mixto o triple producto escalar

Dado tres vectores, no nulos, en R 3 , $\bar{u}$, $\bar{v}$, w se llama así al NÚMERO que se obtiene de multiplicar escalarmente uno de los vectores por el vector producto vectorial de los otros dos.

Notación: $\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w})$

Recordar: en este producto primero debe efectuarse el producto vectorial y luego el escalar, de otra forma se pretendería efectuar el producto vectorial entre un número y un vector.

Ejemplo:

Hallar el producto mixto entre los vectores $\bar{u}$ = (3,-2,7), $\bar{v}$ = (2,4,-1) y $\bar{w}$ = (1,5,2)

Planteamos $\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w})$

Efectuamos el producto vectorial $\bar{v} \times \bar{w}$ de la forma ya aprendida

2 4 -1

1 5 2 $\bar{v} \times \bar{w}$ = (13,-5,6)

luego el producto escalar (3,-2,7) . (13,-5,6) = 39 + 10 + 42 = 91

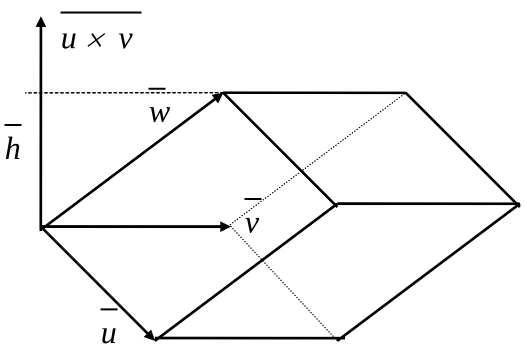
Propiedades

P1) $\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = (\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{w}$

Esta propiedad indica que mientras se mantenga el orden de los vectores pueden intercambiarse los productos.

P2) El valor absoluto del producto mixto de tres vectores no nulos es numéricamente igual al volumen del paralelepípedo que tiene por aristas los vectores dados.

Demostración



volumen paralelepípedo = superficie de la base . altura (**)

sup. base = $|\overline{u} \times \overline{v}|$

altura (h) = | proyección de $\overline{w} / (\overline{u} \times \overline{v})$ | (*)

Recordando producto escalar: $\overline{w} \cdot (\overline{u} \times \overline{v}) = \underbrace{|\overline{u} \times \overline{v}|\, |\overline{w}| \cos(\overline{u} \times \overline{v} \wedge \overline{w})}$

proyección $\overline{w}/(\overline{u} \times \overline{v})$

entonces en (*) $h = \dfrac{|\overline{w} \cdot (\overline{u} \times \overline{v})|}{|\overline{u} \times \overline{v}|}$

reemplazando en (**) por sus iguales:

$$\boxed{\text{volumen paralelepípedo } = |\overline{u} \times \overline{v}| \frac{|\overline{w} \cdot (\overline{u} \times \overline{v})|}{|\overline{u} \times \overline{v}|} = |\overline{w} \cdot (\overline{u} \times \overline{v})|}$$

P3) Si los tres vectores son coplanares entonces su producto mixto es 0.

La condición necesaria y suficiente de coplanaridad de tres vectores es la nulidad de su producto mixto: $\overline{u} \cdot (\overline{v} \times \overline{w}) = 0$

Ejemplo:

Sabiendo que los puntos A(1,2,-1), B(2,-1,3), C(0,1,-2) y D(2,0,3) determinan un tetraedro,
a) calcular su volumen
b) calcular la altura correspondiente al vértice D.

PROBLEMAS DE APLICACION

1) El equipo olímpico de clavados de Estados Unidos, con 10 miembros, participó este año en tres competencias internacionales. Calcule el promedio de cada uno, si las calificaciones obtenidas en las competencias están representadas por los vectores $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$. ¿ Cuál es la calificación del décimo miembro del equipo?

$$\bar{u} = (8.5, 9.5, 8, 9.2, 9.9, 10, 8.8, 6.5, 9.4, 9.8)$$
$$\bar{v} = (9.5, 7.5, 8.2, 8.2, 8.9, 7.9, 7.8, 8.5, 9.4, 9.6)$$
$$\bar{w} = (8.5, 8.5, 8.9, 9.2, 8.6, 9.9, 9.8, 9.5, 9.1, 8.9)$$

2) Una empresa de artículos deportivos tiene dos fábricas, y en cada una se ensamblan bicicletas de montaña fabricadas en aluminio y titanio. La primera planta produce 150 bicicletas de aluminio y 15 de titanio por día. La segunda, 220 y 20, respectivamente.

Si $\bar{v}_1=\begin{bmatrix}150\\15\end{bmatrix}$ y $\bar{v}_2=\begin{bmatrix}220\\20\end{bmatrix}$, calcula e interpreta el significado de las expresiones

(a) $\bar{v}_1 + \bar{v}_2$

(b) $\bar{v}_2 - \bar{v}_1$

(c) $10\,\bar{v}_1$

(d) $a\bar{v}_1 + b\bar{v}_2$, siendo a y b>0

(e) ¿Cuántos días debe trabajar cada fábrica para que la empresa entregue 2600 bicicletas de aluminio y 250 de titanio?

3) Una aerolínea compra suministros para tres de sus aviones. El costo promedio por viaje, en dólares, se expresa con un cuadro de números cuyas columnas son vectores a_1,a_2,a_3.

Clase	**Avión 1**	**Avión 2**	**Avión 3**
Primera	350	300	450
Negocios	500	600	700
Económica	800	700	900

Calcula e interpreta el significado de las siguientes operaciones en términos comerciales:

a) $\bar{a}_1+\bar{a}_2+\bar{a}_3$

b) $\bar{a}_3 - \bar{a}_2$

c) $10\,\bar{a}_3$

d) $7\overline{a}_1+8\ \overline{a}_2+9\ \overline{a}_3$

¿Cuántos viajes hizo cada avión, si la aerolínea gastó $ 23000 para la primera clase, $ 38000 para la de negocios y $ 49000 para la económica?

4) a) Traza los vectores a=[3,2], b=[2,-1], y c=[7,1]

b) Muestra, mediante un croquis, que existen escalares *s* y *t*, tales que

$$\overline{c} = s\overline{a} + t\overline{b}$$

c) Utilice el croquis para estimar los valores de *s* y *t* .

d) Encuentre los valores exactos de *s* y *t* .

5) Dado el vector $\overline{\mathbf{u}}$=(1, 2, 3) y los puntos A (-1, 2, -3) y B (2, -1, 2) halle el vector $\overline{a}=2\overline{\mathbf{u}}\ .\ \overline{BA}$, y determine un vector $\overline{\mathbf{c}}$ paralelo al vector $\overline{a}$ y cuyo módulo sea 2- ¿Existe un único vector $\overline{\mathbf{c}}$?

6) Dados los puntos A (2, 1, -1) y B (1, -3, 2) y el vector $\overline{\mathbf{w}}$ = -2$\overline{\mathbf{w}}$ + 2$\overline{AB}$, y determine la proyección de $\overline{h}$ sobre $\overline{\mathbf{w}}$. Indica además si el vector proyección tiene el mismo sentido que $\overline{\mathbf{w}}$ o no.

7) Dados los puntos A (1, -2, 1) y B (3, 1, -2) , halla el coseno del ángulo que forma el vector $\overline{AB}$ con el vector posición del punto P (3, 2, -1). Si el ángulo es menor que 90º, halle el versor asociado al vector $\overline{AB}$, y si no es menor, halle el versor asociado al vector posición del punto P.

SOLUCIÓN PROBLEMAS INTRODUCTORIOS

Ejemplo 1

La demanda de camisas es de 500 unidades, el fabricante recibe $ 30 por cada camisa vendida. Entonces recibe 500x$30 = $1500 por la venta de las camisas. Razonando de esta forma, se llega a qué el fabricante recibe una cantidad de dinero igual a:

500.(30)+ 300.(40)+ 200.(18) = $30600

Este resultado se obtiene directamente planteando el producto escalar:

$\overline{p}.\overline{d}$ = (500,300,200) . (30,40,18)

[Problemas Introductorios]

Ejemplo 2

Por la primera compra tenemos los vectores:

$\overline{c}$ = (1 pack de CD_ROM, 2 DVD, 2 cartuchos de tinta) , y

$\overline{p}$ = ($6, $2, $15).

Las dos compras sumadas: $\overline{c}+\overline{c}$ = (1,2,2)+(1,2,2) = 2$\overline{c}$ = (2,4,4)

El costo total de la compra es: $\overline{p}$. 2$\overline{c}$ = (6,2,15).(2,4,4) = 6.2+2.4+15.4 = $80

[Problemas Introductorios]

Ejemplo 3

Parte 1

El conjunto de los vectores de las tasas de crecimiento vendrá dado por vectores de la forma:

(Cp, 50Cp, 100Cp)

Parte 2

$(Cp_1,50Cp_1,100Cp_1)+(Cp_2,50Cp_2,100Cp_2)=(Cp_1+Cp_2,50(Cp_1+Cp_2),100(Cp_1+Cp_2))$

Luego se verifica la condición de aditividad.

λ (Cp, 50Cp, 100Cp) = (λCp, 50 λCp, 100 λCp)

Por lo tanto se verifica la condición de homogeneidad.

[Problemas Introductorios]

SOLUCIONES ACTIVIDADES

SOLUCIONES ACTIVIDAD I

2) No, ya que para poder decir si los sentidos de dos vectores son iguales (u opuestos), primeramente deben tener la misma dirección

3) Si

4) a- No, pues sus módulos son distintos.
   b- Sí, ya que tienen mismo módulo, dirección y sentido.
   c- No, porque si bien tienen mismo módulo y dirección, sus sentidos son distintos.
   d- No, pues sus direcciones son distintas.
   e- No, ya que sus sentidos son distintos.
   f- Sí, idem (b).

[Actividad I]

SOLUCIONES ACTIVIDAD II

1) El origen y el extremo son el mismo punto (y un punto no determina una recta). Luego no están definidos dirección y sentido del vector nulo.

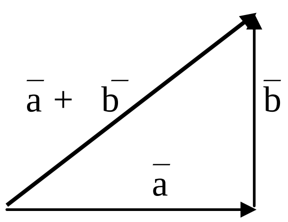
[Actividad II]

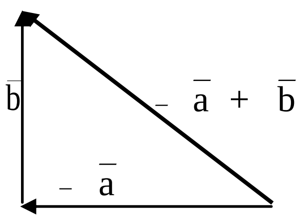
SOLUCIONES ACTIVIDAD IV

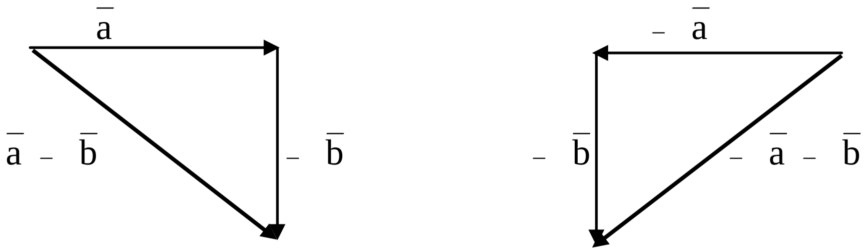
1) La diagonal mayor es $\bar{a} + \bar{b}$
   La diagonal menor puede ser $\bar{a} - \bar{b}$ o $\bar{b} - \bar{a}$ según el sentido asignado a dicha diagonal.

2) $\bar{a} + \bar{b} = \bar{c} \Leftrightarrow \bar{a} + \bar{b} + (-\bar{b}) = \bar{c} + (-\bar{b}) \underset{(a)}{\Leftrightarrow} \bar{a} + \bar{0} = \bar{c} + (-\bar{b}) \underset{(b)}{\Leftrightarrow} \bar{a} = \bar{c} - \bar{b}$

   (a) Aplicando S_5 .
   (b) Aplicando S_4 y definición de diferencia.

3) 





[Actividad IV]

SOLUCIONES ACTIVIDAD VI

2) $(-1)\,\bar{a} + \bar{a} = (-1)\,\bar{a} + 1\,\bar{a} = (-1+1)\,\bar{a} = 0\,\bar{a} = \bar{0}$
En la 1° igualdad se aplica la P_5 , en la 2° la P_2 y en la 4°, la parte (2) de la definición del producto de un número por un vector.
Luego, por la S_5 concluimos que: $(-1)\,\bar{a} = -\,\bar{a}$

Demostremos ahora la 2° proposición, otra vez usando sucesivamente la propiedad P_2, la parte (2) de la definición, y la S_5 para la conclusión:

$$(-\alpha)\,\bar{a} + \alpha\,\bar{a} = (-\alpha + \alpha)\,\bar{a} = 0\,\bar{a} = \bar{0} \Rightarrow (-\alpha)\,\bar{a} = -\alpha\,\bar{a}$$

Demostremos a continuación la tercera proposición:

$$\alpha\,\bar{a} = \bar{0} \Rightarrow |\alpha|\,|\bar{a}| = 0 \Rightarrow \bar{a} = \bar{0} \;\vee\; \alpha = 0$$

3) Observemos que: $(1/|\bar{a}|)\,\bar{a}$ tiene la misma dirección que $\bar{a}$ -por definición de producto de un número por un vector-, el mismo sentido -por ser $(1/|\bar{a}|)>0$-, y su módulo es: $(1/|\bar{a}|)\,|\bar{a}| = 1$. Entonces se cumplen las condiciones de la definición de $\bar{a}_0$, luego: $\bar{a}_0 = (1/|\bar{a}|)\,\bar{a}$

4) $\Rightarrow$) Si $\alpha \neq 0$ y $\alpha\,\bar{a} = \bar{b} \Rightarrow (1/\alpha).(\alpha\,\bar{a}) = (1/\alpha)\,\bar{b} \Rightarrow ((1/\alpha).\alpha)\,\bar{a} = (1/\alpha)\,\bar{b} \Rightarrow$
$\bar{a} = (1/\alpha)\,\bar{b}$
$\Leftarrow$) $\bar{a} = (1/\alpha)\,\bar{b} \Rightarrow (\alpha\,\bar{a}) = \alpha\,(1/\alpha)\,\bar{b} \Rightarrow \alpha\,\bar{a} = (\alpha\,.1/\alpha)\,\bar{b} \Rightarrow \alpha\,\bar{a} = 1\,\bar{b} \Rightarrow$
$\alpha\,\bar{a} = \bar{b}$

[Actividad VI]

SOLUCIONES ACTIVIDAD VII

1) La prueba requerida es simple aplicación de la definición del producto de un número por un vector.

2) $\bar{a}$ y $\bar{b}$, vectores no nulos y $\bar{a} \,/\!/\, \bar{b} \Rightarrow$ tienen igual dirección, pero los sentidos pueden ser iguales u opuestos.

- Si tienen igual sentido, sus versores son iguales: $\bar{a}_0 = \bar{b}_0 \Rightarrow \dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = \dfrac{\bar{b}}{|\bar{b}|}$

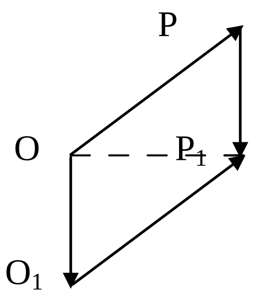
$\Rightarrow \bar{a} = \dfrac{|\bar{a}|}{|\bar{b}|}\,\bar{b} \Rightarrow \exists\, \alpha \in \Re^+$ (donde $\alpha = |\bar{a}|/|\bar{b}|$), tal que $\bar{a} = \alpha\,\bar{b}$

• Si tienen sentidos opuestos, sus versores también: $\bar{a}_0 = -\bar{b}_0 \Rightarrow \dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = -\dfrac{\bar{b}}{|\bar{b}|}$

$\Rightarrow \bar{a} = -\dfrac{|\bar{a}|}{|\bar{b}|}\,\bar{b} \Rightarrow \exists\, \alpha \in \Re^-$ donde $\alpha = -\dfrac{|\bar{a}|}{|\bar{b}|}$, tal que $\bar{a} = \alpha\, \bar{b}$

3) $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = -2$

4)



$\overline{OP_1} = \overline{OO_1} + \overline{O_1P_1}$ y $\overline{OP_1} = \overline{OP} + \overline{PP_1} \Rightarrow \overline{OO_1} + \overline{O_1P_1} = \overline{OP} + \overline{PP_1}$

$\Rightarrow \overline{OO_1} = \overline{PP_1}$ (ya que por hipótesis $\overline{O_1P_1} = \overline{OP}$)

6) Como $\dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = \bar{a}_0$ y $\dfrac{\bar{b}}{|\bar{b}|} = \bar{b}_0$, entonces: $\bar{a} \,//\, \bar{b}$ y $\dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|} \overset{\textbf{(i)}}{=} \dfrac{\bar{b}}{|\bar{b}|} \Rightarrow \bar{a}_0 = \bar{b}_0$

Es decir que la igualdad **(i)** se verifica cuando el sentido de $\bar{a}$ es igual al de $\bar{b}$.

Mientras que: $\bar{a} \,//\, \bar{b}$ y $\dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|} \overset{\textbf{(ii)}}{=} -\dfrac{\bar{b}}{|\bar{b}|} \Rightarrow \bar{a}_0 = -\bar{b}_0$

Luego la igualdad **(ii)** se verifica cuando $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son de sentidos opuestos.

[Actividad VII]

SOLUCIONES ACTIVIDAD IX

1) 1°) $\bar{a} \,.\, \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\alpha = |\bar{b}||\bar{a}|\cos\alpha = \bar{b} \,.\, \bar{a}$, considerando que los vectores son no nulos y que forman un ángulo $\alpha \neq \pi/2$.

Si alguno o ambos vectores son nulos, o $\alpha = \pi/2$, entonces: $\bar{a} \,.\, \bar{b} = 0 = \bar{b} \,.\, \bar{a}$.

Luego en todos los casos se verifica la propiedad conmutativa.

2°) • Si $\lambda > 0$, $(\widehat{\lambda\, \bar{a}, \bar{b}}) = \alpha = (\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$

$\lambda(\bar{a}.\,\bar{b}) = \lambda|\bar{a}||\bar{b}|\cos\alpha = |\lambda|\,|\bar{a}||\bar{b}|\cos\alpha = |\lambda\,\bar{a}||\bar{b}|\cos\alpha = (\lambda\,\bar{a}) \,.\, \bar{b}$

• Si $\lambda<0$, $(\widehat{\lambda\bar{a},\bar{b}}) = 180° - \alpha$, entonces $\cos(\widehat{\lambda\bar{a},\bar{b}}) = \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$

Luego:

$\lambda(\bar{a}.\bar{b}) = \lambda|\bar{a}||\bar{b}|\cos\alpha = -|\lambda|\,|\bar{a}||\bar{b}|\cos\alpha = -|\lambda\bar{a}||\bar{b}|\cos\alpha =$
$= |\lambda\bar{a}||\bar{b}|(-\cos\alpha) = |\lambda\bar{a}||\bar{b}|\cos(\widehat{\lambda\bar{a},\bar{b}}) = (\lambda\bar{a}).\bar{b}$

En las sucesivas igualdades se aplicaron: la definición de producto escalar, la de valor absoluto de un número negativo, la de módulo del producto de un número por un vector y, nuevamente en la última igualdad, la definición de producto escalar.
Además por propiedad conmutativa, y por lo antes demostrado (cambiando el orden de $\bar{a}$ y $\bar{b}$), también concluimos que: $\lambda(\bar{a}.\bar{b}) = \lambda(\bar{b}.\bar{a}) = (\lambda\bar{b})\bar{a}$
Y, como: $(\lambda\bar{b})\bar{a} = \bar{a}.(\lambda\bar{b})$, queda: $\lambda(\bar{a}.\bar{b}) = \bar{a}.(\lambda\bar{b})$

• Si $\lambda = 0$, entonces $0(\bar{a}.\bar{b}) = 0$; $((0\bar{a}).\bar{b}) = (\bar{0}.\bar{b}) = 0$ y
$(\bar{a}.(0\bar{b})) = (\bar{a}.\bar{0}) = 0$, luego la propiedad también es válida.

[Actividad IX]

SOLUCIONES ACTIVIDAD X

1) $\bar{a}.\bar{a} = |\bar{a}||\bar{a}|\cos 0° = |\bar{a}|^2$, entonces $|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}.\bar{a}}$

2) a) 9.(1/6).(2/5).cos π/3 = 0,3   b) 81   c) 82,8   d) 0,16   e) - 6

3) $|\bar{a} \pm \bar{b}| = (\bar{a} \pm \bar{b}).(\bar{a} \pm \bar{b}) = \bar{a}.\bar{a} \pm \bar{a}.\bar{b} \pm \bar{b}.\bar{a} + \bar{b}.\bar{b} =$

$|\bar{a}|^2 \pm 2(\bar{a}.\bar{b}) + |\bar{b}|^2$

[Actividad X]

SOLUCIONES ACTIVIDAD XI

⇒) Si $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son no nulos y perpendiculares, entonces: $\bar{a}.\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos 90° = 0$
⇐) $\bar{a}.\bar{b} = 0$ y $\bar{a} \neq \bar{0}$ y $\bar{b} \neq \bar{0} \Rightarrow \cos(\bar{a}\wedge\bar{b}) = 0 \Rightarrow \bar{a}\wedge\bar{b} = 90° \Rightarrow \bar{a} \perp \bar{b}$

[Actividad XI]

SOLUCIONES ACTIVIDAD XII

2) $(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = \pi/4$ 4) a) $\frac{19}{8}\bar{a}_0 = \frac{19}{64}\bar{a}$ b) $\frac{409}{2}\bar{a}_0 = \frac{409}{4}\bar{a}$

[Actividad XII]

SOLUCIONES ACTIVIDAD XIII

a) 1 b) 0 c) 0 d) 0 e) 1 f) 0 g) 0 h) 0 i)1

[Actividad XIII]

SOLUCIONES ACTIVIDAD XIV

1) $\overline{OA}$ // $\overline{i} \Rightarrow \overline{OA} = a_1 \overline{i}$, con $a_1 \in \Re$, $a_1 \neq 0$; $\overline{OD}$ // $\overline{j} \Rightarrow \overline{OD} = a_2 \overline{j}$, con $a_2 \in \Re$, $a_2 \neq 0$; $\overline{OC}$ // $\overline{k} \Rightarrow \overline{OC} = a_3 \overline{k}$, con $a_3 \in \Re$, $a_3 \neq 0$ (*)

$\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AR} + \overline{RP}$, como $\overline{AR} = \overline{OD}$ y $\overline{RP} = \overline{OC}$, entonces

$\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{OD} + \overline{OC}$

Luego, reemplazamos por las expresiones de (*): $\overline{OP} = a_1 \overline{i} + a_2 \overline{j} + a_3 \overline{k}$

Queda para el alumno el análisis de los casos particulares (algún o algunos $a_i = 0$).

[Actividad XIV]

Trabajo Práctico

Ejercicio N° 1

a) Representar en un sistema de coordenadas cartesianas los siguientes vectores:

$\bar{v} = (3,4)$

$\bar{u} = (1,-2)$

$\overline{AB}$, siendo A(1,-2) y B(-3,1)

Vector posición de P(-3,-6)

$\bar{w} = \bar{u} + \bar{v}$

b) Resolver analítica y gráficamente las siguientes operaciones:

$\overline{OP} - \bar{w}$

$\bar{v}_0 + \bar{u}$ (vo : versor asociado a $\bar{v}$)

$2\,\bar{w} - \overline{AB}$,

$-\ \bar{v} + 1/3\ \overline{OP}$

Ejercicio N° 2

Dados P (2, 6), Q (1,3) y R (3, -1) encontrar las coordenadas del punto S de modo que los vectores $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$ sean iguales.

Ejercicio N° 3

El punto medio de un segmento es R (1, -15), uno de los extremos está en el punto Q (-2, 17). Calcular las coordenadas del otro extremo de dicho segmento.

Ejercicio N° 4

Sabiendo que la distancia entre dos puntos A y B es 11 y siendo las coordenadas de A (3, -5, 2) y las de B (9, 2, z), calcular el valor de z.

Ejercicio N° 5

Siendo $\bar{u}$ = (1, 2), $\bar{v}$ =(2, -4) y $\bar{w}$ = (2, -3), verificar si w puede escribirse como CL de $\bar{u}$ y v, es decir, si existen $\alpha 1$, $\alpha 2$ / $\alpha 1\ \bar{u} + \alpha 2\ \bar{v} = \bar{w}$

Ejercicio N° 6

Un vector esta situado en el plano xy, y su segundo coseno director vale –1/2. Determinar el valor de los otros dos cosenos directores.

Ejercicio N° 7

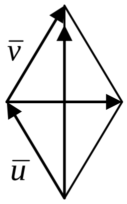
Dado un vector $\bar{u}$, del cual se sabe que: $\alpha 1 = 4/9$, $\alpha 2 = 2/9$, calcular $\alpha 3$. (α_3 = cos director)

Ejercicio N° 8

Indicar si un vector $\bar{u}$ en el espacio puede formar con los ejes coordenados los siguientes ángulos:

a) $(\bar{u}, \bar{i}) = 45º$; $(\bar{u}, \bar{j}) = 135º$; $(\bar{u}, \bar{k}) = 60º$
b) $(\bar{u}, \bar{i}) = 90º$; $(\bar{u}, \bar{j}) = 150º$; $(\bar{u}, \bar{k}) = 60º$
c) $(\bar{u}, \bar{i}) = 30º$; $(\bar{u}, \bar{j}) = 45º$; $(\bar{u}, \bar{k}) = 60º$

Ejercicio N° 9



El polígono de la figura es un rombo.

Expresar las diagonales en función de $\bar{u}$ y $\bar{v}$.
Probar que las diagonales son perpendiculares.

Ejercicio N° 10

Sabiendo que $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son dos vectores tales que
$|\bar{u}| = 5$, $|\bar{v}| = 8$ y que forman entre ellos un ángulo de 60º, determinar gráfica y analíticamente $|\bar{u}+\bar{v}|$ y $|\bar{u}-\bar{v}|$

Ejercicio N° 11

Dados los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ z tal que $|\bar{a}| = \sqrt{3}$, $|\bar{b}| = 2$ y $(\bar{a}, \bar{b}) =$ □/3 hallar:
a) $\bar{a} \cdot \bar{b}$
b) $\bar{b} \cdot \bar{b}$
c) $(-3\bar{a} - \bar{b}) \cdot (\bar{b} - 2\bar{a})$

Ejercicio N° 12

Dados los vectores:

$\bar{a} = (2,0)$ $\qquad$ $\bar{u} = (3,-4,1)$
$\bar{b} = (3/2,2)$ $\qquad$ $\bar{v} = (0,2,-7)$
$\bar{c} = 2\,\bar{i} + 3\,\bar{j}$ $\qquad$ $\bar{w} = 5\,\bar{i} + 3\,\bar{j} - \bar{k}$

Calcular:
a) $|\bar{a}|$ $\qquad$ $|\bar{w}|$
b) $\bar{a} \cdot \bar{b}$ $\qquad$ $\bar{v} \cdot \bar{w}$

c) $(\bar{b} + \bar{a}) \cdot \bar{b}$ $\qquad$ $(\bar{u} - \bar{v}) \cdot (-4\,\bar{w})$

d) $\bar{b}o \cdot (\bar{a} - \bar{c})$ $\qquad$ $\bar{w}o \cdot \bar{v}o$

Ejercicio N° 13

Dados $\bar{u}$ = (5,3) y $\bar{v}$ = (3,-1)

a) Graficar el vector proyección $\bar{u}/\bar{v}$ y el vector proyección $\bar{v}/\bar{u}$

b) Hallar la proy $\bar{u}/\bar{v}$ y la proy $\bar{v}/\bar{u}$

c) Encontrar las componentes del vector proyección $\bar{u}/\bar{v}$

Ejercicio N° 14

Dados los siguientes pares de vectores, averiguar si son paralelos o perpendiculares. De otra forma, calcular el ángulo que ellos determinan.

a) (4,1) y (16,4)
b) (2,1) y (-3,6)
c) (-3,2) y (1,-1/3)

Ejercicio N° 15

Sabiendo que el módulo del vector $\bar{u}$ es igual a 3 y el módulo de $\bar{v}$ es igual a 5 determinar para que valor de β, los vectores $\bar{u} + \beta\bar{v}$ y $\bar{u}$ +(-β)$\bar{v}$ son perpendiculares.

Ejercicio N° 16

Hallar las componentes del vector $\bar{u}$ sabiendo que su módulo es igual a 50, además es colineal con $\bar{b} = (6, -8, -\frac{15}{2})$ y forma un ángulo agudo con el eje z.

Ejercicio N° 17

Si $\bar{u}$ *= (3,-1,-2) y* $\bar{v}$ *= (1,2,-1),* Calcular:

a) $\bar{u} \times \bar{v}$
b) $(2\bar{u} + \bar{v}) \times \bar{v}$
c) $(2\bar{u} - \bar{v}) \times (2\bar{u} + \bar{v})$

Ejercicio N° 18

Hallar las componentes de $\bar{v}$ sabiendo que el módulo de $\bar{v}$ es igual 51, $\bar{v}$ es perpendicular al eje Z y al vector $\bar{a} = (8, -15, 3)$ y forma un ángulo agudo con el eje x.

Ejercicio N° 19

Sean A(1,2,3), B(-2,0,5) y C(4,1,5) los vértices de un triángulo,

a) Determinar el valor del ángulo en el vértice B.

b) Encontrar el perímetro y el área del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$.

Ejercicio N° 20

Calcular el volumen del paralelepípedo cuyas aristas concurrentes en un vértice queden
determinadas por los vectores $\bar{a}$ = (1,2,-1), $\bar{b}$ = (0,0,2) y $\bar{c}$ = (1,1,3).

Ejercicio N° 21

Siendo *A(1,2,0), B(1,2,2), C(2,1,-1) y D(x,0,3),* determinar el valor de *x* para que los cuatro puntos resulten coplanares.

Ejercicio N° 22

Calcular el volumen del tetraedro de vértices *A(1,-1,0) , B(2,-1,-1), C(-4,4,0) y D(1,2,1).*

Ejercicio N° 23

Calcular □□para que los vectores $\bar{a}$ = (-1,3,2), $\bar{b}$ = (2, □,1) y $\bar{c}$ = (1,0,-1) resul-ten:

a) coplanares

b) definan un paralelepípedo de volumen igual a 6.

Ejercicios de revisión

1) Dados los vectores $\bar{a} = (-1,-1,1)$ y $\bar{b} = (2,1,-1)$ y los puntos $P_1(6,-4,0)$ y $P_2(5,-2,3)$, calcular los cosenos directores del vector

$$\bar{w} = \left[\left|\bar{a} \times \bar{b}\right|^2 + \left(\bar{a} \cdot \bar{b}\right)\right]\overline{P_1P_2}$$

2) Las fuerzas $\overline{F_1} = 2\,\bar{i} + 3\,\bar{j} - \bar{k}$, $\overline{F_2} = -5\,\bar{i} + \bar{j} + 2\,\bar{k}$ y $\overline{F_3} = 6\,\bar{i} - \bar{k}$ actúan simultáneamente sobre una partícula. Encontrar la magnitud y dirección de la fuerza resultante.

3) Sea $\bar{r}$ que cumple con las siguientes condiciones:
$(\bar{r}, \bar{i}) = 135º$, $(\bar{r}, \bar{j}) = 60º$, $90º \leq (\bar{r}, \bar{k}) \leq 180º$ y $|\bar{r}| = 4$ y sean $\bar{q} = (-1,2,3)$ $\bar{s} = (\alpha, 1, 2)$ Calcular:

a) el vector $proy_{\bar{r}}(3\bar{q} - \bar{r})$
b) el o los valores de α para que el área del paralelogramo de lados $\bar{q}$ y $\bar{s}$ valga $\sqrt{6}$

4) Si $|\bar{u}| = 2$, $|\bar{v}| = 3$ y $(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{\pi}{3}$ Calcular $|\bar{u} - 2\bar{v}|$

5) Determinar $|\bar{u} x \bar{v}|$ sabiendo que $\bar{u}$ se encuentra en el plano coordenado xy con módulo 3, mientras que $\bar{v}$ tiene la dirección y sentido del versor $\bar{k}$ y módulo 4.

6) Si los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ forman entre si un ángulo de 60º, $|\bar{a}| = 5$ y $\bar{a} - \bar{b} \perp \bar{b}$

Calcular:

i) $|\bar{b}|$
ii) el área del paralelogramo determinado por $\bar{a}$ y $\bar{b}$

iii) el área del triángulo determinado por $\bar{a}$ y $\bar{b}$