Seminario Universitario. Material para Estudiantes

Matemática

Unidad 1. Números reales

Prof. Osvaldo Chapov

CONTENIDOS

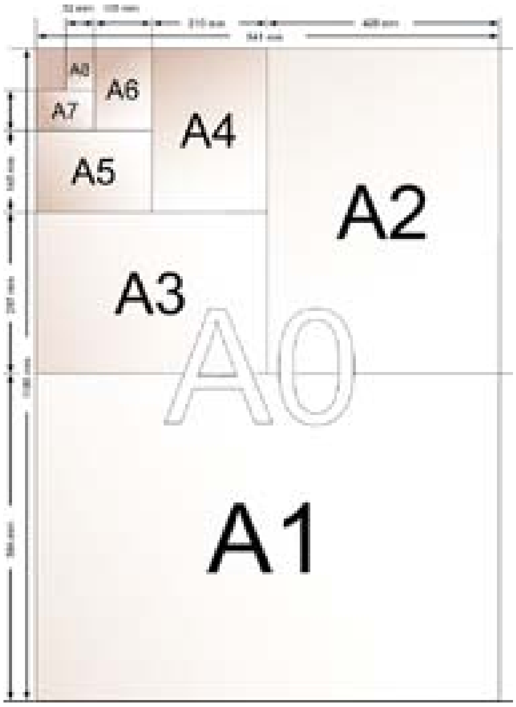
Conjuntos numéricos. Números naturales, racionales, irracionales y reales.

Representación gráfica. Radicación. Propiedades. Potencias de exponente fraccionario. Racionalización. Notación científica. Volumen de cuerpos.

INTRODUCCIÓN

SITUACIONES PROBLEMÁTICAS

Situación Problemática Inicial

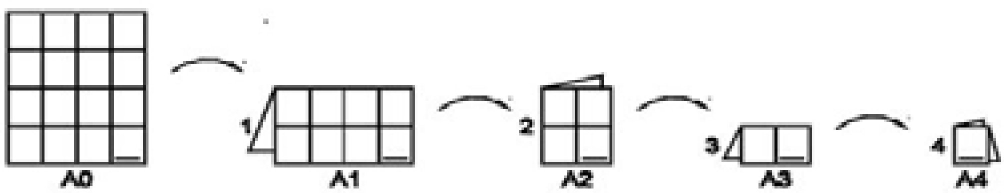


Los formatos de hojas DIN.

Existe un sistema internacionalmente aceptado de tamaños de hojas de papel rectangulares, llamados A0, A1, A2, A3, A4, etc. En la figura siguiente se muestra un diagrama con todos los tamaños juntos.

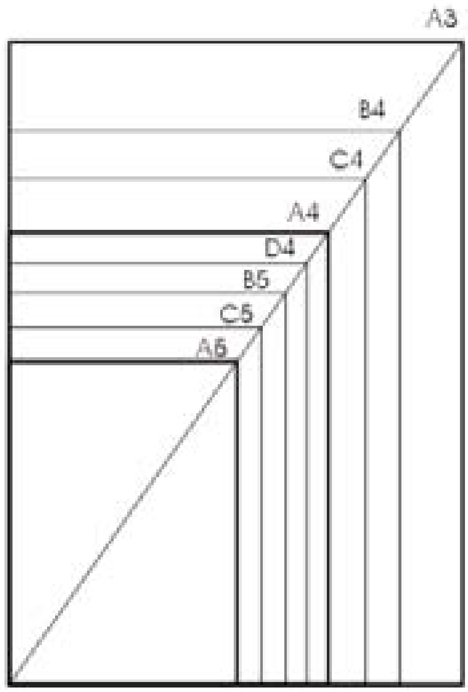
a) ¿Cómo se determinaron estos tamaños de hojas?

La hoja A1 se obtiene cortando por la mitad la hoja A0, en el sentido del ancho; l ahoja A2 se obtiene cortando por la mitad la hoja A1, en el sentido del ancho, y así sucesivamente, tal como se muestra en la secuencia siguiente:



b) ¿Qué propiedades tienen las hojas obtenidas?

Si realizamos el procedimiento anterior, podemos verificar que las hojas obtenidas, se pueden agrupar así:



En la tabla siguiente, registramos las dimensiones de las hojas A4, A5, A6, etc.

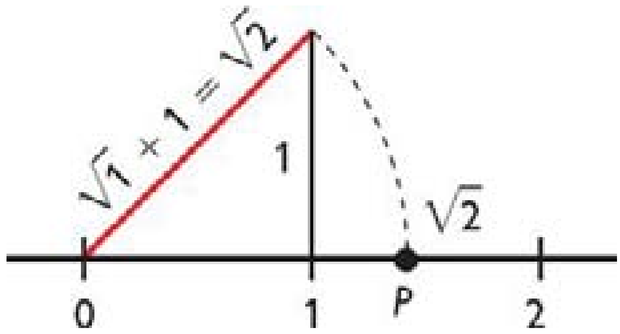
Hoja	Ancho (en cm.)	Largo (en cm.)	$\frac{\text{Largo}}{\text{Ancho}}$
A4	21	29,7	1,414
A5	14,85	21	1,414
A6	10,5	14,85	1,414
A7	7,425	10,5	1,414
A8	5,25	7,425	1,414
A9	3,7125	5,25	1,414

Las hojas A4 son las más utilizadas. En la indicación del paquete de la resma, se indica que la hoja A4 tiene las dimensiones de 29,7 cm por 21 cm.

De manera que se puede observar que el ancho y largo de todas las hojas, verifican la relación $\dfrac{\text{Largo}}{\text{Ancho}} = \sqrt{2}$

Ahora bien, ¿cómo podemos representar $\sqrt{2}$ en la recta numérica?

Utilizando la relación pitagórica entre los lados de un triángulo rectángulo, dibujamos uno cuyos catetos midan a 1 y obtenemos que la hipotenusa mide exactamente $\sqrt{2}$, como muestra la figura siguiente:



En la situación inicial planteada, se han operado con todo tipo de números. Números naturales, decimales, expresiones fraccionarias y hasta números irracionales.

Repasemos bien el conjunto total de números y su ubicación en el esquema total, para identificar y reconocer cuando aparecen en distintos problemas.

Recomendamos analizar las cuestiones planteadas durante la lectura y consultar al docente en caso de duda.

CONJUNTOS NUMÉRICOS

NÚMEROS NATURALES

A los números que utilizamos para contar la cantidad de elementos de un conjunto no vacío se los denomina números naturales. Designamos con la letra IN al conjunto de dichos números.

$$IN = \{1,2,3,4,5...\}$$

LA DIFERENCIA ENTRE DOS NÚMEROS NATURALES ¿ES SIEMPRE UN NÚMERO NATURAL?

NÚMEROS ENTEROS

El conjunto de los números enteros es la unión de los conjuntos de números naturales, el cero y los naturales negativos.

Simbólicamente: $\boxed{Z = N \cup \{0\} \cup N^{-}}$

¿CUÁNTOS NÚMEROS ENTEROS EXISTEN ENTRE -3 Y 7? ¿CUÁNTOS NÚMEROS ENTEROS EXISTEN ENTRE DOS ENTEROS DADOS?

Un número racional se puede expresar como fracción $\frac{n}{m}$ *, donde n y m son números enteros y m* $\neq 0$ *.*

ESCRIBIR UN NÚMERO RACIONAL ENTRE $\frac{2}{3}$ **y** $\frac{3}{7}$ **.**

¿CUÁNTOS NÚMEROS RACIONALES HAY ENTRE LOS DOS DADOS?

DESAFIO *La siguiente secuencia algebraica muestra que todos los números reales son cero. ¿Dónde está el error?*

Si $a \in R$

$$a = a$$
$$a^2 = a^2$$
$$a^2 - a^2 = a^2 - a^2$$
$$(a - a)\,(a + a) = a\,(a - a)$$
$$a + a = a$$
$$a = a - a$$
$$a = 0$$

NÚMEROS REALES

Todo número racional puede expresarse como número decimal exacto o periódico.

Los números que no se pueden expresar como fracción son números irracionales.

EJEMPLOS NÚMEROS IRRACIONALES

EJEMPLO 1

0,1234567891011...
La parte decimal de este número irracional es la sucesión de los números naturales.

EJEMPLO 2

$\pi \cong 3{,}141592654$

El símbolo ≅ indica que se esto representa una aproximación del número irracional π *. Notemos que también existen otras aproximaciones para este número; por ejemplo:* 3,14 ; 3,141 ; 3,14159 ; 3,1416 ; *... etc.*
El número aparece al calcular la longitud de una circunferencia y el área de un círculo. Se sugiere ver video http://www.rtve.es/aventura/universo-matematico/webcap2/actividades_parte_2.html

EJEMPLO 3

$e \cong 2{,}71$
Representa una aproximación del número irracional **e**. *Al efectuar cálculos en los que intervienen los números irracionales, tomamos una cantidad finita (entre* 3 *y* 5*) de cifras decimales. Por lo tanto, podemos considerar* $e \cong 2{,}718$ *o bien* $e \cong 2{,}71828$. *El número e se presenta en procesos de crecimiento de una población animal o vegetal, y en problemas de desintegración radiactiva. Seguramente habrás visto en el tendido de cables eléctricos que los cables entre un poste y otro determinan una curva en cuya ecuación también está presente el número* **e**.

EJEMPLO 4

Otro número irracional muy famoso, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *, llamado el número de oro, se obtiene si realizas, por ejemplo, el cociente entre las longitudes del lado menor y el lado mayor de las hojas tamaño A*4 *que comúnmente se utilizan en fotocopiadora, o realizando el mismo cálculo con los lados de una tarjeta de crédito.*

La unión del conjunto de números racionales con los números irracionales forman el conjunto de números reales.

Ahora que tenemos un criterio común para ordenar y ubicar números en una estructura formal y una simbología universal para comprender cualquier material bibliográfico que puedas consultar como referencia, podemos revisar ciertas operaciones entre números como la división y su algoritmo, que servirá de herramienta para luego resolver ciertas situaciones problemáticas.

ALGORITMO DE LA DIVISIÓN	$a, b \in \mathbb{Z},\ a \neq 0\ \exists q, r$ únicos, tales que $b = a.q + r$ $0 \leq r < \lvert a \rvert$

En lenguaje coloquial la simbología expresada en el algoritmo de la división, sería:

"Dados dos números enteros a *y* b*, a distinto de cero, existen dos números únicos* q *y* r *tales que verifica* b = a.q + r*, tal que* r *sea mayor que cero y menor que el módulo de* a*."*

Simbólicamente

$$\begin{array}{l|l} b & a \\ \hline r & q \end{array}$$

Para resolver algunos de los problemas iniciales, son útiles los conceptos de Máximo Común Divisor y Mínimo Común Múltiplo entre dos números.

Recordemos que:

Máximo Común Divisor	***Si se descomponen dos números enteros postivos en sus factores primos, el máximo común divisor es el producto de los factores primos comunes con el menor exponente.***
Mínimo Común Múltiplo	***Si se descomponen dos números enteros positivos en sus factores primos, el mínimo común múltiplo es el producto de los factores primos comunes y no comunes con el mayor exponente.***

SÍNTESIS DE CONJUNTOS NUMÉRICOS

NUMEROS NATURALES (IN)
0

NUMEROS NATURALES (INº)

NUMEROS NATURALES NEGATIVOS

NUMEROS ENTEROS (Z)

NUMEROS FRACCIONA-RIOS

(Q) NUMEROS RACIONALES

(II) NUMEROS IRRACIONALES

NUMEROS REALES ($\Re$)

PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES

Propiedades de la potenciación

EJEMPLOS RESUELTOS

1) En el producto de potencias de igual base los exponentes se suman:

$$a^n . a^m = a^{n+m}$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^2\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right)^5 = -\frac{32}{243}$$

2) En el cociente de potencias de igual base los exponentes se restan:

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^2 : \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right)^{-1} = -\frac{3}{2}$$

3) En la potencia de potencia los exponentes se multiplican:

$(a^n)^m = a^{n.m}$ $\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{64}{729}$

4) Potencia de exponente uno: Todo número (o letra) de exponente uno, es el mismo número (o letra).

$b^1 = b$ $2^1 = 2$

5) Potencia de exponente cero: Todo número (o letra) de exponente cero, da por resultado 1.

$b^0 = 1$ $2^0 = 1$

Cuidado: si la base es 0 *no está definido:* 0^0

6) La potencia distribuye al producto y al cociente:

$$\left(\frac{1}{5}.\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2.\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{225}$$

$$\left(\frac{1}{5}:\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2:\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{25}.\frac{9}{4} = \frac{9}{100}$$

7) Cuadrado de la suma de dos números

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Ejemplo: $(x+2y^2)^2 = x^2 + 4xy^2 + 4y^4$

8) La potencia no es conmutativa: $2^3 \neq 3^2$

9) La potencia no es asociativa: $(4^2)^3 \neq 4^{(2^3)}$

10) La potenciación no es distributiva con respecto a la adición ni a la sustracción

$(4+2)^2 \neq 4^2 + 2^2$ *pues 36 es distinto que 20*

Radicación

Decimos que: $\sqrt[3]{729000} = 90$ *pues* $90^3 = 729000$

$\sqrt[3]{512000} = 80$ *pues* $80^3 = 512000$

Pero no podemos encontrar solución a $\sqrt{-10000}$ *ya que no conocemos números que elevados al cuadrado den resultado negativo.*

Simbología: $\sqrt[n]{a} = p$

n: índice, es un número natural mayor o igual que dos.
a*: radicando, es un número racional mayor o igual que cero.*

$\sqrt{}$ *radical*
p: valor raíz o resultado

La raíz enésima de un número racional a *(no negativo) es un número racional* b*, lo que es equivalente* a *decir que* a *es la potencia enésima de* b*.*

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Raíz enésima par y a ≥ 0

Ejemplo: Calcular $\sqrt{169}$

Solución: El radical $\sqrt{169}$ *representa un único número real no negativo, el número 13, que corresponde a un único punto de la recta numérica. Pero.....*

¡Cuidado!!: *Para resolver, por ejemplo la ecuación* $x^2 = 169$ *procedemos así:*

$\sqrt{x^2} = \sqrt{169}$ *, aplicando raíz cuadrada a ambos miembros de la ecuación, por propiedad de módulo.*

$|x| = \sqrt{x^2}$ *, entonces,*

$|x| = 13$

Pero, hay dos valores de "x" cuyo módulo es 13*:* $|13| = 13$ *y* $|-13| = 13$

Debemos tener presente que la ecuación $x^2 = 169$ *tiene dos soluciones:*

$x_1 = -13$ *y* $x_2 = 13$*, mientras que el radical* $\sqrt{169}$ *representa un único número real como vimos.*

Propiedades de la radicación

EJEMPLOS RESUELTOS

EJEMPLO 1

Raíz de raíz (raíces sucesivas): es otra raíz cuyo índice es el producto de los índices dados.

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$ $\qquad$ $\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$

EJEMPLO 2

La radicación es distributiva respecto de la multiplicación y división:

$$\sqrt{\frac{64}{4}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{4}}$$

$$\sqrt{16} = \frac{8}{2}$$

$$4 = 4$$

$$\sqrt{2}.\sqrt{8} = \sqrt{2.8} = \sqrt{16} = 4$$

EJEMPLO 3

La radicación no es distributiva respecto de la adición y sustracción

$$\sqrt{9+16} \neq \sqrt{9}+\sqrt{16}$$
$$\sqrt{25} \neq 3+4$$
$$5 \neq 7$$

EJEMPLO 4

La radicación no es conmutativa: $\sqrt[3]{8} \neq \sqrt[8]{3}$

Errores comunes que se cometen cuando se aplican propiedades de radicación y potenciación en las operaciones

a) *Resolver y analizar:*

$$-2^2 =$$
$$(-2)^2 =$$

Observar *que en el primer miembro de la desigualdad, la potencia no incluye al signo "-", mientras que en el segundo miembro sí.*

b)

$$2^0+2^1+2^3 \neq 2^0.2^1.2^3$$
$$1+2+8 \neq 1.2.8$$
$$11 \neq 16$$

Observar *que se trata de una suma de potencias de igual base y no de un producto de potencias de igual base. Luego, se resuelve cada término independientemente y se suman sus resultados.*

c)

$$(2-3)^2 \neq 2^2-3^2$$
$$(-1)^2 \neq 4-9$$
$$1 \neq -5$$

Observar *que la potencia no es distributiva respecto de la resta y tampoco lo será respecto de la suma.*

d)

$$\left(-\frac{3}{2}\right)^{-3}=\left(-\frac{2}{3}\right)^{3}=-\frac{8}{27}$$

Observar *que se trata de una potencia, de un número racional (en este caso con notación fraccionaria), de base negativa y exponente impar. Luego, en primer lugar se invierte la base (debido al exponente negativo) y se eleva a la misma potencia pero positiva; y, en segundo lugar se resuelve la potencia acorde a las reglas de potencia y los signos.*

e)

$$\sqrt{36-9}\neq\sqrt{36}-\sqrt{9}$$
$$\sqrt{25}\neq 6-3$$
$$5\neq 3$$

Observar *que la radicación no es distributiva respecto de la resta y tampoco lo será respecto de la suma.*

f)

$$\sqrt{4}.\sqrt[3]{64}=2.4=8$$

Observar *que se ha resuelto independientemente, cada raíz, y luego se ha colocado el resultado. Pero si los índices de los radicales fueran los mismos:*

$\sqrt{4}.\sqrt{64}=\sqrt{4.64}=\sqrt{256}=16$, *entonces se puede colocar todo bajo una sola raíz y luego resolver.*

ACTIVIDAD
CONJUNTOS NUMÉRICOS

1) Completar la tabla con $\in$, $\notin$ según corresponda.

Número \ Conjunto	Naturales	Enteros	Racional	Irracio-nales	Reales
7					
$\sqrt{10}$					
$-2{,}08$					
$1{,}121221221$					
$\sqrt{25}$					
$\sqrt{-4}$					
$\frac{7}{6}$					

2) Aplicando propiedades calcula: $\dfrac{\left(\sqrt{8}-\sqrt{2}\right)^{4n+3}.\left(\sqrt{8}-\sqrt{2}\right)^{1-2n}}{\left(\sqrt{8}-\sqrt{2}\right)^{2n+2}}$

3) a) Escribir un número racional mayor que 1 y menor que $\sqrt{2}$

b) Escribir un número irracional mayor que 2 y menor que $2{,}1$.

4) Expresar la medida exacta, en centímetros, del perímetro de un cuadrado si el lado mide $\sqrt{2}$ cm.

5) Expresar la medida exacta, en metros, de la superficie de un terreno triangular cuyos catetos miden $\sqrt{2}$ metros.

6) Calcular la medida de la diagonal de un terreno rectangular cuyos lados miden 10 metros y 12 metros. Expresar el resultado aproximado con dos decimales.

7) Calcular el área de un círculo de 100 cm. de radio y expresar el resultado aproximado con 3 decimales.

8) Resolver y verificar el resultado con la calculador.

a) $$\frac{\frac{7}{10}-\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{7}{4}}{2-\frac{1}{4}}=$$

b) $$\frac{2-\frac{1}{3}}{2+\frac{1}{3}}+\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}-\frac{1}{1-\frac{3}{4}}=$$

NÚMEROS IRRACIONALES

Alguno de los problemas anteriores, requerían una respuesta en forma exacta y otros aproximada.

Evidentemente, habrá problemas donde convenga diferenciar entre algún tipo de respuesta, exacta o aproximada.

La simbología utilizada para representar los números irracionales, por ejemplo $\sqrt{2}$*, es justamente para identificar un número que tiene infinitas cifras decimales no periódicas y por lo tanto, como sabemos, la precisión depende de la cantidad de cifras que use como resultado de algún problema. Es decir;*

$\sqrt{2} \longrightarrow$ *Valor exacto*

$1{,}41 \longrightarrow$ *Valor aproximado en dos decimales*

Continuando con la revisión de las propiedades de los números y sus operaciones, te propongo el siguiente:

DESAFIO *Sigue la secuencia siguiente y DESCUBRE EL ERROR:*

$$16 - 36 = 25 - 45$$

$$16 - 36 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 25 - 45 + \left(\frac{9}{2}\right)^2$$

$$4^2 - 2.4.\frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 5^2 - 2.5.\frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2$$

$$\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2$$

$$4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2}$$

$$4 = 5$$

POTENCIA DE EXPONENTE RACIONAL

Extendemos la idea de potencia, de modo que los números racionales no enteros puedan funcionar como exponentes. Veremos que estas potencias guardan una estrecha relación con las raíces.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \longrightarrow 3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2}$$

¿Esto se cumple si el número “a” es menor que cero?

EJEMPLO

Observa el siguiente ejemplo donde se expresa de distintas maneras, una operación, aplicando propiedades y exponente racional:

$$\left(2^{-\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{10}}\right)^2 = \left(2^{-\frac{1}{4}+\frac{1}{10}}\right)^2 = \left(2^{-\frac{3}{20}}\right)^2 = \left(2^{-\frac{3}{20}.2}\right) = \left(2^{-\frac{6}{20}}\right) = \left(2^{-\frac{3}{10}}\right) = \sqrt[10]{2^{-3}} = \sqrt[10]{\frac{1}{8}}$$

<u>*Para analizar*</u>

Sigue la secuencia y analiza en grupo con tus compañeros, el error cometido:

$$\sqrt[4]{(-2)^2} = \sqrt[4]{(2)^2}$$
$$(-2) = 2$$

CONCLUSIÓN: ....

....

Para revisar, entonces, las propiedades de los radicales y poder operar correctamente con números irracionales, recordemos algunas características:

SIMPLIFICACIÓN DE RADICALES

Veamos algunos ejemplos para justificar las propiedades:

$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$ $\qquad$ $\sqrt[3]{(-8)^3} = -8$

Por lo tanto, si n es par $\Rightarrow$ $\boxed{\sqrt[n]{a^n} = |a|}$

Si n es impar $\Rightarrow$ $\boxed{\sqrt[n]{a^n} = a}$

Continuando con el objetivo de simplificar, repasemos lo básico:

<u>*EJEMPLO 1*</u>

Supongamos tener que factorizar: $\sqrt[3]{32}$

El número que aparece en el radicando es compuesto, luego puede factorizarse y expresarse en función de sus factores primos: $\sqrt[3]{2^5}$ *, luego descomponer la potencia utilizando las propiedades:*

$\sqrt[3]{2^3.2^2} = 2.\sqrt[3]{2^2}$ *y queda:* $2.\sqrt[3]{2^2}$

EJEMPLO 2

Supongamos tener que factorizar una expresión más compleja

$\sqrt[3]{32.a^6.b^2.c^{17}} =$

Tomamos todos los exponentes (cuyos valores superen al índice) y utilizando las propiedades de la potenciación, descomponemos según sea conveniente, para extraer del radicando y simplificar la expresión:

$$\sqrt[3]{2^3.2^2.a^3.a^3.b^2.c^3.c^3.c^3.c^3.c^3.c^2} = 2.a.a.c.c.c.c.c.\sqrt[3]{2^2.b^2.c^2} = 2.a^2.c^5.\sqrt[3]{2^2.b^2.c^2}$$

RADICALES SEMEJANTES

Son los que tienen el mismo índice y el mismo radicando.

EJEMPLO

$2\sqrt{5}$ *y* $-3\sqrt{5}$ 2 *y* -3 *son los coeficientes.*

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE RADICALES

Para sumar o restar radicales semejantes extraemos factor común el radical y después realizamos la suma algebraica.

EJEMPLO 1

$$5.\sqrt{2} + \frac{1}{2}.\sqrt{2} - \frac{2}{3}.\sqrt{2} = \left(5 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right).\sqrt{2} = \frac{29}{6}.\sqrt{2}$$

Si los radicales no son semejantes, se deben extraer factores fuera de radical, para obtener radicales semejantes:

EJEMPLO 2

$$\sqrt{12}-3\sqrt{3}+2\sqrt{75}=\sqrt{2^2.3}-3\sqrt{3}+2\sqrt{5^2.3}=2\sqrt{3}-3\sqrt{3}+10\sqrt{3}=9\sqrt{3}$$

EJEMPLO 3

$$\sqrt[4]{4}+\sqrt[6]{8}-\sqrt[12]{64}=\sqrt[4]{2^2}+\sqrt[6]{2^3}-\sqrt[12]{2^6}=\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$$

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE RADICALES

Radicales de igual índice

Para multiplicar o dividir radicales de igual índice se aplica la propiedad recíproca de la distributiva con respecto a la multiplicación (o división)

EJEMPLO

$$\sqrt[5]{a^4}.\sqrt[5]{a^3}=\sqrt[5]{a^4.a^3}=\sqrt[5]{a^{4+3}}=\sqrt[5]{a^7}=a^5.\sqrt[5]{a^2}$$

Radicales de distinto índice

Una manera es utilizar la propiedad de escribir los radicales como potencia fraccionaria y viceversa para simplificar las expresiones.

EJEMPLO

$$\sqrt[4]{a^3}.\sqrt[6]{a^5}=a^{\frac{3}{4}}.a^{\frac{5}{6}}=a^{\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\right)}=a^{\frac{19}{12}}=\sqrt[12]{a^{19}}=\sqrt[12]{a^{12}.a^7}=a.\sqrt[12]{a^7}$$

Racionalización de denominadores

Frecuentemente encontramos fracciones como:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \quad ; \quad \frac{-4}{\sqrt[3]{5}} \quad ; \quad \frac{5}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

Dada una fracción cuyo denominador es un número irracional algebraico, el proceso de transformarla en otra fracción equivalente a la dada pero con denominador racional se llama racionalización.

EJEMPLO 1

Para racionalizar esta expresión: $\frac{3}{\sqrt{2}}$

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} . \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3.\sqrt{2}}{\sqrt{2.2}} = \frac{3.\sqrt{2}}{2}$$

La fracción obtenida tiene denominador racional.
Si el denominador es un radical único de índice distinto de 2, haremos:

EJEMPLO 2

$$\frac{2}{\sqrt[5]{3^3}} = \frac{2}{\sqrt[5]{3^3}} . \frac{\sqrt[5]{3^2}}{\sqrt[5]{3^2}} = \frac{2.\sqrt[5]{3^2}}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{2.\sqrt[5]{3^2}}{3}$$

Si el denominador es un binomio de la forma: $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$

EJEMPLO 3

$$\frac{5}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} . \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{3}-5\sqrt{2}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{5\sqrt{3}-5\sqrt{2}}{5-2} = \frac{5\sqrt{3}-5\sqrt{2}}{3}$$

EJEMPLO 4

Racionalizar: $\dfrac{2}{\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{2}}}$

$$\frac{2}{\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{2}}}=\frac{2}{\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{2}}}\cdot\frac{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{2}}}=\frac{2..\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{2}}}{\sqrt{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}}=\frac{2.\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{2}}}{\sqrt{5-2}}$$

$$=\frac{2.\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{2}}}{\sqrt{5-2}}==\frac{2.\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{2}}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{2}).3}}{(\sqrt{3})^2}=\frac{2}{3}\sqrt{3.\sqrt{5}+3\sqrt{2}}$$

EJEMPLO 5

Racionalizar: $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}+\sqrt{7}}$

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}+\sqrt{7}}=\frac{1}{(2-\sqrt{3})+\sqrt{7}}\cdot\frac{(2-\sqrt{3})-\sqrt{7}}{(2-\sqrt{3})-\sqrt{7}}=\frac{(2-\sqrt{3})-\sqrt{7}}{(2-\sqrt{3})^2-(\sqrt{7})^2}=\frac{(2-\sqrt{3})-\sqrt{7}}{(2-\sqrt{3})^2-7}$$

$$=\frac{(2-\sqrt{3})-\sqrt{7}}{(4-2.2.\sqrt{3}+3)-7}=\frac{(2-\sqrt{3})-\sqrt{7}}{-4\sqrt{3}}=\frac{[(2-\sqrt{3})-\sqrt{7}]}{-4\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}-(\sqrt{3})^2-\sqrt{21}}{-4(\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}-3-\sqrt{21}}{-12}=-\frac{1}{6}\sqrt{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\sqrt{21}$$

ACTIVIDAD

NÚMEROS IRRACIONALES

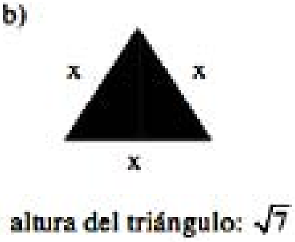
1) Simplifica, utilizando la posibilidad de expresar la radicación como potencia fraccionaria.

a) $\dfrac{\sqrt{14}.\sqrt[3]{49}}{\sqrt[4]{28}}$ b) $\dfrac{\sqrt[5]{12}.\sqrt{32}}{\sqrt[3]{16}.\sqrt[5]{6}}$

2) Las siguientes figuras tienen área igual a 1. Calcular los lados desconocidos. Expresar todos los resultados sin radicales en el denominador.

a)

b)



c)

3) Expresar en forma de radicales las siguientes expresiones:

a) $4^{\frac{1}{3}}$ b) $7^{\frac{-3}{5}}$ c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$ d) $0{,}4^{\frac{-1}{3}}$

4) Para cada una de las siguientes expresiones, obtener una equivalente con denominador racional:

a) $\dfrac{3+\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}$

d) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{4}{\sqrt[4]{5}}$

e) $\dfrac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{12}-\sqrt{2}}$

c) $\dfrac{2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

f) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$

5) Simplificar todo lo posible la expresión. Luego, calcular su valor para $x = 0{,}0001$.

$$\left[\left(x^{\frac{-2}{3}}\right)^{\frac{3}{5}}\right]^{\frac{5}{4}}$$

6) De los siguientes cálculos hay solo uno bien realizado. Indicar cuál es el correcto y corregir los otros tres:

a) $\sqrt{100+25} = \sqrt{100} + \sqrt{25}$

b) $\sqrt[6]{(-2)^6} = -2$

c) $\sqrt{12}.\sqrt{3} = \sqrt{12.3} = 6$

d) $\sqrt{(-9)(-4)} = \sqrt{-9}.\sqrt{-4}$

7) Expresar el radicando como producto, para extraer todos los factores posibles de las raíces:

a) $\sqrt{75}$

b) $\sqrt{200}$

c) $\sqrt[3]{40}$

d) $\sqrt[5]{96}$

8) Simplificar las siguientes operaciones entre números irracionales:

a) $\sqrt{2} + \sqrt{2}$

b) $\sqrt{2} + \sqrt{18}$

c) $\sqrt{5} + \sqrt{20} - \sqrt{80} - \sqrt{125}$

d) $-\sqrt{6} + \sqrt{150} + \sqrt{98} - \sqrt{288}$

e) $\sqrt{\frac{49}{5}} - \sqrt{\frac{1}{125}}$

9) Resolver usando las propiedades y simplificar las expresiones:

a) $\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{32}$

b) $\sqrt{5} + \sqrt{45} + \sqrt{180} - \sqrt{80}$

c) $\sqrt{24} - 5\sqrt{6} + \sqrt{486}$

d) $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16}$

e) $3\sqrt{\frac{2}{9}} - 5\sqrt{\frac{2}{9}} - 5\sqrt{50} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{25}}$

10) Simplificar las expresiones:

a) $\sqrt{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}$

b) $5.\sqrt[3]{5} : \sqrt{\left(\frac{1}{5}.\sqrt[5]{25}\right)^{-\frac{1}{3}}}$

c) $\left(\sqrt{6}\cdot\sqrt[4]{12}\right)^3 : 18^{\frac{1}{2}}$

d) $\dfrac{-100^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{10:\sqrt{0{,}001}}}$

e) $\dfrac{\left(2^3\right)^{-2}\cdot\left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(2^{10}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}}$

11) Racionalizar y simplificar las expresiones:

a) $\dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{1}{3-\sqrt{2}}$

c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+\sqrt{5}}$

d) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

ACTIVIDAD

CON SOFTWARE MATEMÁTICO

Es altamente recomendable que puedan adoptar algún recurso informático que complemente la revisión de las herramientas matemáticas básicas para iniciar su formación como ingeniero. La modelización de problemas se facilita mediante el uso de estas tecnologías, que no reemplazan al lápiz y papel pero que potencian el análisis, investigación de casos y la efectividad en las conclusiones.

Utilizar el software Maxima, para verificar las actividades realizadas sobre números reales como la radicación.

Como ejemplo se incluye la serie de comandos de la siguiente actividad:

$\sqrt{2}-\sqrt{200}+\sqrt{72}=$

```
(%i8) sqrt(2)-sqrt(200)+sqrt(72);
(%o8) √2-2^(5/2)
(%i9) radcan(%);
(%o9) -3√2
```

$$\text{(\%o8)}\quad \sqrt{2}-2^{5/2}$$

$$\text{(\%o9)}\quad -3\sqrt{2}$$

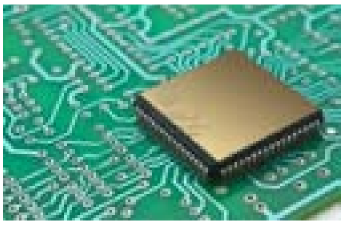
Simplificar – simplificar radicales.

Investigar las distintas opciones del menú Simplificar tales como: simplificar expresión, simplificar radicales, factorizar expresión.

Verificar la serie de actividades de Números Irracionales que pueda ser posible usando este software.

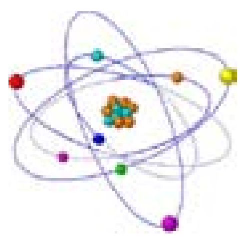
NOTACIÓN CIENTÍFICA

Situación 1



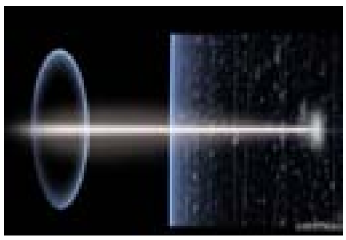
Se ha medido un espacio muy pequeño en un chip de computadora y tiene una anchura de 0.00000256*m, una longitud de* 0.00000014*m y una altura de* 0.000275*m. ¿Cuál es su volumen?*

Situación 2



Los átomos tienen un núcleo con electrones que giran a su alrededor. En el núcleo de los átomos existen protones y neutrones.
Los protones y los neutrones tienen cerca de 0,000000000000001 *m. de ancho y una masa aproximada de* 0,0000000000000000000000000017 *Kg.*

Situación 3



La luz recorre aproximadamente 300.000 *km. por segundo. En un año recorre aproximadamente* 9.460.000.000.000 *Km., la cual se denomina año luz.*
Algunas galaxias cercanas se encuentran a 60.000.000 *años luz.*

Las situaciones anteriores involucran números muy grandes o muy pequeños. La herramienta que utilizan los científicos para simplificar la notación y poder operar con dichos números es la ***NOTACIÓN CIENTÍFICA****. Para ello se utilizan las potencias de diez.*

Por ejemplo, para resolver la situación problemática 1, primero convertimos los datos a notación científica de la siguiente manera:

Anchura: $0{,}00000256$ ***m*** $= 2{,}56 \times 10^{-6}$ ***m.***
Longitud: $0{,}00000014$ ***m*** $= 1{,}4 \times 10^{-7}$ ***m.***
Altura: $0{,}000275$ ***m.*** $= 2{,}75 \times 10^{-4}$ ***m.***
Luego multiplicamos las cifras por un lado: $2{,}56 \times 1{,}4 \times 2{,}75 = 9{,}856$
Luego multiplicamos las potencias de diez utilizando las propiedades de las potencias con igual base: $10^{-6} \times 10^{-7} \times 10^{-4} = 10^{(-6-7-4)} = 10^{-17}$
El volumen final es: $9{,}856 \times 10^{-17}$ ***m***^{3}.

ACTIVIDAD

NOTACIÓN CIENTÍFICA

1) La luz que viaja aproximadamente a 3.0×10^5 km por segundo, tarda cerca de 5.0×10^2 102segundos en llegar a la Tierra. ¿Cuál es la distancia aproximada, en notación científica, del Sol a la Tierra?

2) La fisión nuclear se utiliza como fuente de energía. ¿Sabes cuánta energía proporciona un gramo de uranio 235? La respuesta es $\frac{4{,}7 \times 10^9}{235}$ kilocalorías. Escríbela en notación científica.

3) El diámetro de un virus es de 5×10^4 m. ¿Cuántos de esos virus son necesarios para rodear la Tierra? Radio medio de la Tierra: 6370 km.

4) Una molécula de hidrógeno pesa $3{,}3 \times 10^{-24}$ g. ¿Cuántas moléculas hay en un gramo de hidrógeno?

Respuestas:

1) 1.5×10^8 km. = 150.000.000 km.
2) 2×10^7.
3) 8×10^{13} virus.
4) 3×10^{23} moléculas.

VOLUMEN DE CUERPOS

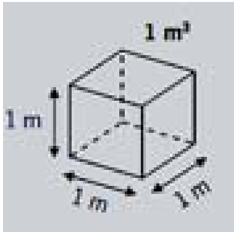
Iniciamos recordando el concepto de volumen de un cuerpo.

> ***El volumen de un cuerpo es la cantidad de espacio que ocupa.***
> ***Para medir el volumen de un cuerpo, lo comparamos con el volumen de otro cuerpo elegido como unidad y determinamos el número de unidades que contiene.***

UNIDADES DE VOLUMEN

El metro cúbico es la unidad principal de volumen. Se escribe m^3.

Es el volumen de un cubo que tiene 1 metro de arista.



- *Los múltiplos del m^3 son cubos que tienen de arista múltiplos del metro:*
  - *1 decámetro cúbico (dam^3) es un cubo que tiene 1 dam de arista.*
  - *1 hectómetro cúbico (hm^3) es un cubo que tiene 1 hm de arista.*
  - *1 kilómetro cúbico (km^3) es un cubo que tiene 1 km de arista.*
- *Los submúltiplos del m^3 son cubos que tienen de arista submúltiplos del metro:*
  - *1 decímetro cúbico (dm^3) es un cubo que tiene 1 dm de arista.*
  - *1 centímetro cúbico (cm^3) es un cubo que tiene 1 cm de arista.*
  - *1 milímetro cúbico (cm^3) es un cubo que tiene 1 mm de arista*

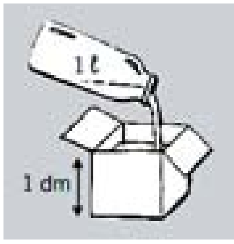
UNIDADES DE CAPACIDAD

El litro es la unidad principal de capacidad. La denotamos con la letra "ℓ".
Los múltiplos (unidades mayores) y submúltiplos (unidades menores) del litro son:

Múltiplos del litro				Unidad	Submúltiplos del litro		
10.000 ℓ Mirialitro (mal)	1.000 ℓ Kilolitro (kl)	100 ℓ Hec- tolitro (hl)	10 ℓ Decalitro (dal)	ℓ litro	0,1 ℓ Decilitro (dl)	0,01 ℓ Centilitro (cl)	0,001 ℓ Mililitro (ml)

Vertemos una botella de agua de 1 ℓ de capacidad en 1 dm³ y observamos que cabe exactamente.

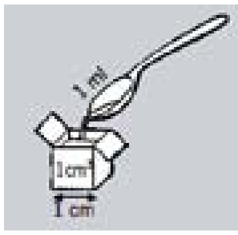
1 litro es el volumen de un cubo que tiene 1 dm de arista, es decir, la capacidad de 1 dm³.



$$\boxed{1\ \ell = 1\ dm^3}$$

Vertemos una cuchara de agua de 1 ml de capacidad en 1 cm³ y observamos que cabe exactamente.

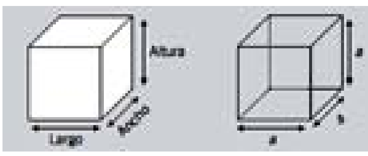
1 mililitro es el volumen de un cubo que tiene 1 cm. de arista, es decir, la capacidad de 1 cm³.



$$\boxed{1\ ml = 1\ cm^3}$$

Volumen de un cubo

Eli cubo es un ortoedro que tiene iguales sus tres aristas, largo-ancho-alto.

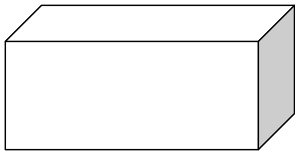


$$\boxed{V = a \cdot a \cdot a = a^3}$$

VOLUMEN DE UN PRISMA

En el caso de un prisma con base rectangular, el volumen se calcula como:

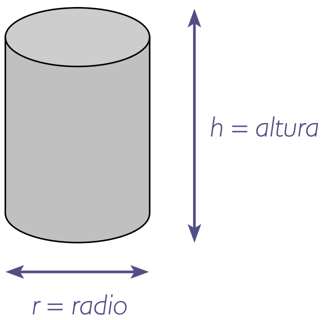
Volumen = Área de la base x altura



VOLUMEN DE UN CILINDRO

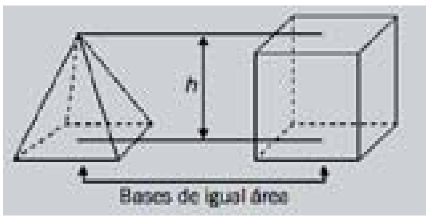
Se calcula de la misma manera que el prisma, entonces:

Volumen = Área de la base x altura = $\pi . r^2 . h$



VOLUMEN DE UNA PIRÁMIDE

Al comparar una pirámide con el prisma, se comprueba que el volumen de la pirámide es tres veces menor que la del prisma, por lo que el volumen de la pirámide es:



$$\textit{Volumen} = \frac{\textit{Área de la base x altura}}{3}$$

ACTIVIDAD

VOLUMEN DE CUERPOS

1) La pirámide de Keops, en Egipto, es de base cuadrangular. El lado de la base mide 230 metros y su altura es de 160 metros. Calcula su volumen total.

2) Calcular el peso de un bloque cúbico de hormigón de 1,9 metros de lado. (un metro cúbico de hormigón pesa 2350 kg.)

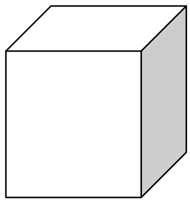
3) Se introduce una bola de plomo, de 1 cm. de radio, en un recipiente cilíndrico de 3,1 cm. de altura y 1,5 cm. de radio. Calcular el volumen de agua necesario para llenar el recipiente.

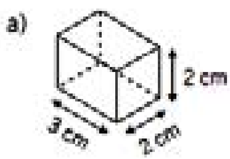
4) Durante una tormenta se registraron precipitaciones de 80 litros por metro cuadrado. ¿Qué altura alcanzaría el agua en un recipiente cúbico de 10 cm. de arista?

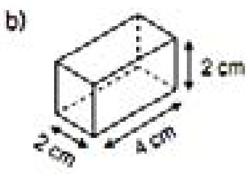
5) Un depósito de agua tiene forma cilíndrica. El diámetro de la base es de 1,8 metros y su altura es de 4,5 metros. Calcular el volumen total del depósito y la cantidad de litros que caben en él.

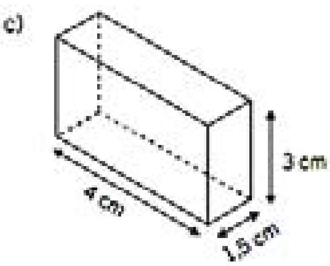
6) Hemos construido un cubo con cartulina. Para ello cubrimos todas las aristas con 240 cm. de cinta. ¿Cuánto mide cada arista? ¿Cuál es el volumen del cubo?

7) Calcular el volumen de los cuerpos siguientes. Expresar el resultado en cm^3 y dm^3.









8) Para una obra en construcción se necesitan 5 m^3 de arena. El camión que posee la empresa proveedora tiene un acoplado cuyas medidas son 1,72 metros de ancho, 2,45 metros de largo y 0,96 metros de profundidad.
¿Cuántos camiones debo pedir para cumplir con lo requerido por la obra? ¿Cuántos metros cúbicos de arena sobran en ese caso?

9) Se arrojan 7 cm^3 de agua en un recipiente cilindro de 1,3 metros de radio. ¿Qué altura alcanzará el agua?

10) ¿Cuántos baldes cilíndricos de 47 cm de altura y 16 cm de radio, se tienen que vaciar en una piscina de 10 metros de largo, 6 metros de ancho y 1,5 metros de profundidad?

11) ¿Cuántas copas de pueden llenar con 6 litros de bebida, si el recipiente cónico de cada copa tiene una altura interior de 6,5 cm y un radio interior de 3,6 cm.?

12) ¿Cuánto tiempo tardará una canilla en llenar un depósito si vierte 130 litros de agua por minuto? El depósito es un prisma de 3,6 metros de altura y base hexagonal, de 2 metros de lado y 1,7 metros de apotema.

13) Calcula el peso, en toneladas, de una pirámide de hormigón, con una base cuadrada de 6 metros de lado y 17 metros de altura. Un metro cúbico de hormigón pesa 2,35 toneladas.

RECURSOS

Software Maxima: *http://maxima.sourceforge.net/es/*

Software "Funciones para Windows" (y otros):
http://www.acienciasgalilei.com/program/program-mates.htm

Sitios interactivos de matemática:
http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/index.htm

Software Geogebra:
http://www.geogebra.org/cms/

Unidades Didácticas del Proyecto Descartes:
http://recursostic.educacion.es/descartes/web/indice_ud.php