

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL  
- FACULTAD REGIONAL ROSARIO -

# CUADRIPOLOS

**Versión 3.1 (marzo 2010)**

Fernando Bianchi  
Electrotecnia II



# CONTENIDO

Versiones .....	4
1. DEFINICIONES.....	5
1.1 Cuadripolo .....	5
1.2 Tipos de cuadripolos.....	5
1.3 Cuadripolos típicos .....	6
2. ECUACIONES DE LA RED DE UN CUADRIPOLO.....	7
3. TIPOS DE PARÁMETROS.....	9
4. OBTENCIÓN de los parámetros .....	11
5. CUADRIPOLOS PASIVOS RECÍPROCOS.....	13
6. CUADRIPOLOS SIMÉTRICOS .....	14
7. CONEXIONES DE CUADRIPOLOS .....	15
7.1 Conexión cascada .....	16
7.2 Conexión paralelo.....	17
7.3 Conexión serie.....	19
7.4 Conexiones mixtas (serie/paralelo).....	20
7.4 Conexiones mixtas (paralelo/serie).....	21
7.5 Polaridad de la conexión.....	22
8. IMPEDANCIAS DE ENTRADA Y SALIDA.....	25
8.1 Impedancia de entrada .....	25
8.2 Impedancia de entrada en vacío y en cortocircuito.....	25
8.3 Impedancia de salida.....	26
8.4 Impedancia de salida en vacío y en cortocircuito .....	26
8.5 Cuadripolos simétricos.....	27
9. ADAPTACIÓN DE IMPEDANCIAS .....	27
9.1 Máxima transferencia de energía .....	27
9.2 Impedancia característica de cuadripolos simétricos.....	29
9.3 Adaptación asimétrica.....	30
10. TRANSFERENCIAS.....	32
10.1 Definición .....	32
10.2 Cálculo de las transferencias.....	32

10.3 Transferencia de impedancia imagen.....	33
Factor de atenuación en decibeles .....	35
ANEXO 1 - TABLA DE CONVERSION DE PARAMETROS .....	40

## VERSIONES

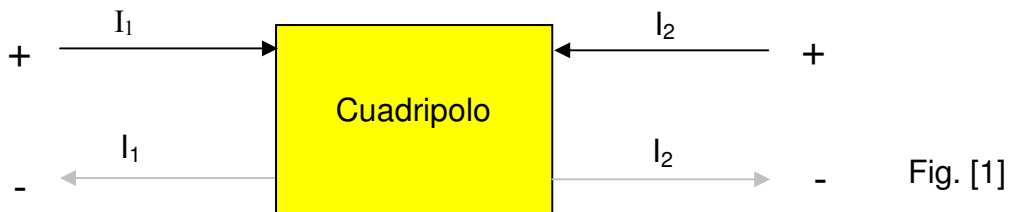
Nº	Fecha	Modificaciones
1	Abril 2001	Versión inicial
2	Marzo 2006	Amplía versión anterior. 7. Conexiones de cuadripolos. Incorporación de Condiciones de O. Brune
3	Junio 2007	Corrige error de versión anterior 10.3 Transferencia de Impedancia Imagen. Corrección error en Factor de Atenuación en decibeles.
3.1	Marzo 2010	No invalida versión anterior Correcciones aportadas por Nicolás Di Ruscio.

# CUADRIPOLOS

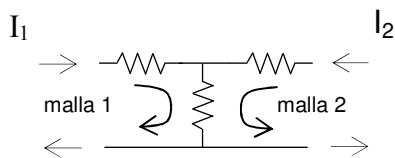
## 1. DEFINICIONES

### 1.1 Cuadripolo

Se llama cuadripolo a una red con dos pares de terminales accesibles desde el exterior, tales que en cada par, la corriente que entra por un terminal es igual a la que sale por el otro. Un par de terminales con esa característica se denomina **puerto**. Por ello, algunos libros denominan a los cuadripolos redes de dos puertos.



Como convención general, cuando se representa un cuadripolo, en cada puerto el terminal de arriba es el positivo y por él entran las corrientes, tal como muestra la figura anterior.



Esta red es un cuadripolo, ya que cumple con las condiciones establecidas. Obsérvese que en cada puerto las corrientes que entran por un terminal y salen por el otro son iguales, pues ambas coinciden con las corrientes de malla indicadas.

### 1.2 Tipos de cuadripolos

Restringiendo el estudio a circuitos lineales, los cuadripolos se pueden clasificar de la siguiente manera:

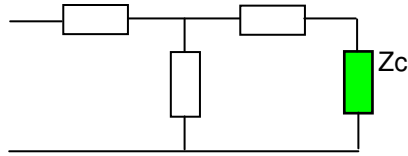
<b>Cuadripolos lineales</b>	<b>Activos</b>	Con fuentes independientes
		Con fuentes dependientes
	<b>Pasivos</b>	Recíprocos
		Simétricos

La teoría de cuadripolos, según veremos, se aplica a circuitos pasivos, o circuitos activos con fuentes dependientes, vale decir que se excluyen de esta teoría los circuitos que contienen fuentes independientes.

### 1.3 Cuadripolos típicos

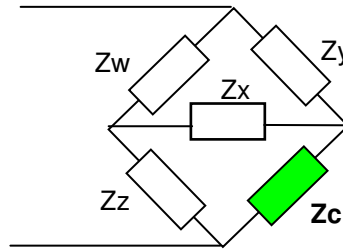
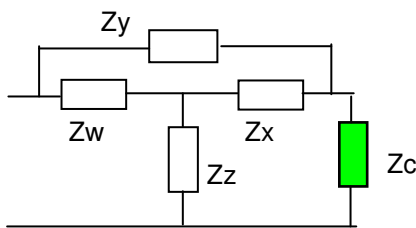
Las siguientes son las configuraciones de red más comunes entre los cuadripolos.

#### T (te)

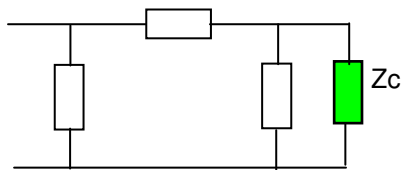


#### T puentada o puente

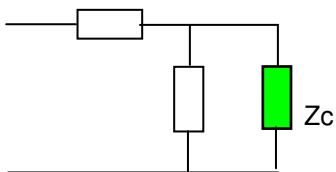
Aunque el dibujo es distinto, ambas redes son iguales



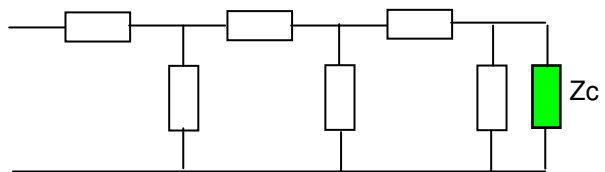
#### $\pi$ (pi)



#### L

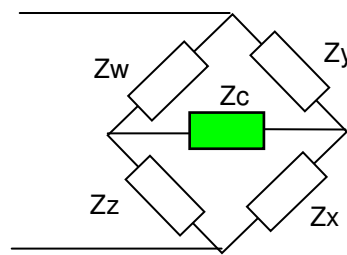
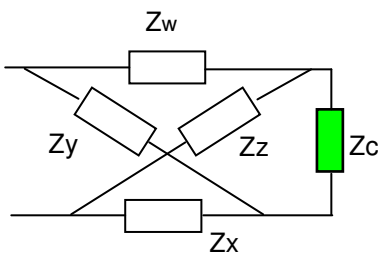


#### Escalera



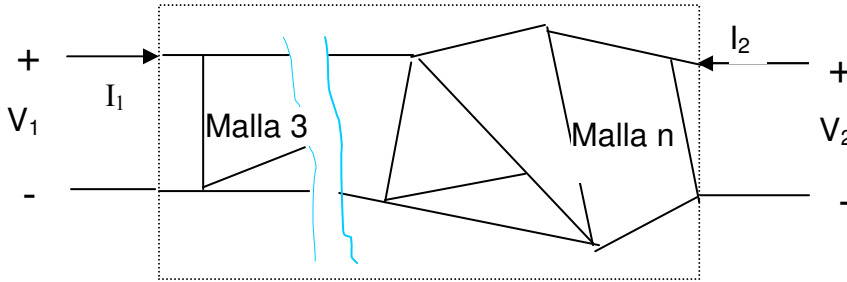
#### Celosía o puente

Si bien el dibujo es diferente, ambas redes son iguales



## 2. ECUACIONES DE LA RED DE UN CUADRIPOLO

Plantaremos las ecuaciones de malla de un cuadripolo genérico, suponiendo que se compone de n mallas, de las cuales dos, accesibles desde el exterior, contienen los puertos. Nuestro objetivo es ver si se pueden establecer relaciones entre las 4 variables observables desde el exterior (V<sub>1</sub>, V<sub>2</sub>, I<sub>1</sub>, I<sub>2</sub>)



En este dibujo, las líneas dentro del cuadripolo representan ramas, que pueden contener resistores, inductores, capacitores y fuentes.

A las mallas que contienen los puertos se asignan los números 1 y 2; las mallas 3 a n están dentro del cuadripolo.

En las ecuaciones, se emplea la siguiente simbología:

- Z<sub>ii</sub> Suma de las impedancias de la malla i
- Z<sub>ij</sub> Suma de las impedancias de la malla i comunes con la malla j.
- E<sub>i</sub> Suma de las f.e.m de la malla i

Entonces,

$$\begin{aligned}
 E_1 &= Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot I_2 + Z_{13} \cdot I_3 + \dots + Z_{1j} \cdot I_j + \dots + Z_{1n} \cdot I_n \\
 E_2 &= Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot I_2 + Z_{23} \cdot I_3 + \dots + Z_{2j} \cdot I_j + \dots + Z_{2n} \cdot I_n \\
 E_3 &= Z_{31} \cdot I_1 + Z_{32} \cdot I_2 + Z_{33} \cdot I_3 + \dots + Z_{3j} \cdot I_j + \dots + Z_{3n} \cdot I_n \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 E_i &= Z_{i1} \cdot I_1 + Z_{i2} \cdot I_2 + Z_{i3} \cdot I_3 + \dots + Z_{ij} \cdot I_j + \dots + Z_{in} \cdot I_n \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 E_n &= Z_{n1} \cdot I_1 + Z_{n2} \cdot I_2 + Z_{n3} \cdot I_3 + \dots + Z_{nj} \cdot I_j + \dots + Z_{nn} \cdot I_n
 \end{aligned}$$

El comportamiento del cuadripolo queda descrito por n ecuaciones con n incógnitas. Si aplicamos la restricción de que en su interior no hay fuentes independientes,

$$E_3 = E_4 = \dots = E_n = 0$$

Mientras que en las mallas 1 y 2, que asoman al exterior:

$$E_1 = V_1 \quad \text{y} \quad E_2 = V_2$$

Entonces, las ecuaciones anteriores, quedan:

$$V_1 = Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot I_2 + Z_{13} \cdot I_3 + \dots + Z_{1j} \cdot I_j + \dots + Z_{1n} \cdot I_n$$

$$V_2 = Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot I_2 + Z_{23} \cdot I_3 + \dots + Z_{2j} \cdot I_j + \dots + Z_{2n} \cdot I_n$$

$$0 = Z_{31} \cdot I_1 + Z_{32} \cdot I_2 + Z_{33} \cdot I_3 + \dots + Z_{3j} \cdot I_j + \dots + Z_{3n} \cdot I_n$$

-----

$$0 = Z_{i1} \cdot I_1 + Z_{i2} \cdot I_2 + Z_{i3} \cdot I_3 + \dots + Z_{ij} \cdot I_j + \dots + Z_{in} \cdot I_n$$

-----

$$0 = Z_{n1} \cdot I_1 + Z_{n2} \cdot I_2 + Z_{n3} \cdot I_3 + \dots + Z_{nj} \cdot I_j + \dots + Z_{nn} \cdot I_n$$

De estas ecuaciones podemos despejar  $I_1$  e  $I_2$  en función de  $V_1$  y  $V_2$ .  
Aplicamos el método de determinantes.

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_1 & Z_{12} & Z_{13} & - & Z_{1j} & - & Z_{1n} \\ V_2 & Z_{22} & Z_{23} & - & Z_{2j} & - & Z_{2n} \\ 0 & Z_{32} & Z_{33} & - & Z_{3j} & - & Z_{3n} \\ - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & Z_{i2} & Z_{i3} & - & Z_{ij} & - & Z_{in} \\ - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & Z_{n2} & Z_{n3} & - & Z_{nj} & - & Z_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & - & Z_{1j} & - & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & - & Z_{2j} & - & Z_{2n} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & - & Z_{3j} & - & Z_{3n} \\ - & - & - & - & - & - & - \\ Z_{i1} & Z_{i2} & Z_{i3} & - & Z_{ij} & - & Z_{in} \\ - & - & - & - & - & - & - \\ Z_{n1} & Z_{n2} & Z_{n3} & - & Z_{nj} & - & Z_{nn} \end{vmatrix}} = V_1 \frac{\Delta_{11}}{\Delta} + V_2 \frac{\Delta_{21}}{\Delta}$$

Desarrollando por la 1ª columna:

$\Delta$  es el determinante del denominador,

$\Delta_{11}$  el cofactor del elemento de la 1ª fila, 1ª columna,

y  $\Delta_{21}$  el cofactor del elemento de la 2ª fila, 1ª columna, signo – incluido.

Los demás elementos de la 1ª columna son nulos.

Análogamente,

$$I_2 = V_1 \frac{\Delta_{12}}{\Delta} + V_2 \frac{\Delta_{22}}{\Delta}$$

El determinante  $\Delta$  tiene dimensión de impedancia a la  $n$ , mientras que la dimensión de los cofactores es de impedancia a la  $n-1$ . En consecuencia, los cocientes entre cada cofactor y el determinante tienen dimensión de impedancia a la  $-1$ , o bien, de admitancia.

En las expresiones anteriores podemos llamar:

$$\frac{\Delta_{11}}{\Delta} = y_{11} \qquad \frac{\Delta_{12}}{\Delta} = y_{21} \qquad \frac{\Delta_{21}}{\Delta} = y_{12} \qquad \frac{\Delta_{22}}{\Delta} = y_{22}$$

Con lo cual, quedan escritas en forma más compacta:

$$\begin{aligned} I_1 &= y_{11} V_1 + y_{12} V_2 \\ I_2 &= y_{21} V_1 + y_{22} V_2 \end{aligned} \qquad [1]$$



También suele escribirse, en forma matricial, del siguiente modo:

$$\begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \end{vmatrix}$$

O bien:

$$\begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \end{vmatrix} = |Y| \cdot \begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \end{vmatrix}$$

Donde:

$$|Y| = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix} \quad \text{se llama } \mathbf{matriz\ admitancia\ del\ cuadripolo}$$

De esta manera, queda demostrado que existen 4 parámetros ( $y_{11}$ ,  $y_{12}$ ,  $y_{21}$ ,  $y_{22}$ ), que llamamos “parámetros admitancia” o parámetros  $y$ , con los que se pueden obtener las corrientes de los puertos de un cuadripolo en función de las tensiones de los mismos. Nótese que para ello no es necesario conocer la composición interna del cuadripolo.

### 3. TIPOS DE PARÁMETROS

Las variables que describen el comportamiento de un cuadripolo visto desde el exterior son 4:

$$I_1, I_2, V_1, V_2$$

Hemos visto que los parámetros admitancia permiten expresar  $I_1$  e  $I_2$  en función de  $V_1$  y  $V_2$  como lo muestran las ecuaciones [1].

A partir de esas ecuaciones podemos establecer otras relaciones.

A modo de ejemplo supongamos que queremos obtener las tensiones en función de las corrientes. Entonces, despejemos  $V_1$  y  $V_2$  de [1], por el método de los determinantes:

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} I_1 & y_{12} \\ I_2 & y_{22} \end{vmatrix}}{\Delta_y} = \frac{I_1 \cdot y_{22} - I_2 \cdot y_{12}}{\Delta_y} \quad V_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_{11} & I_1 \\ y_{21} & I_2 \end{vmatrix}}{\Delta_y} = \frac{I_2 \cdot y_{11} - I_1 \cdot y_{21}}{\Delta_y}$$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix}$

Ordenando,  $V_1 = \frac{y_{22}}{\Delta_y} \cdot I_1 - \frac{y_{12}}{\Delta_y} \cdot I_2$

$$V_2 = \frac{-y_{21}}{\Delta_y} \cdot I_1 + \frac{y_{11}}{\Delta_y} \cdot I_2$$

Si llamamos:

$$\frac{y_{22}}{\Delta_y} = z_{11} \quad -\frac{y_{12}}{\Delta_y} = z_{12} \quad \frac{-y_{21}}{\Delta_y} = z_{21} \quad \frac{y_{11}}{\Delta_y} = z_{22}$$

Podemos escribir:

$$\begin{aligned} V_1 &= z_{11} I_1 + z_{12} I_2 \\ V_2 &= z_{21} I_1 + z_{22} I_2 \end{aligned} \quad [2]$$

Los parámetros  $z_{11}$ ,  $z_{12}$ ,  $z_{21}$ ,  $z_{22}$  tienen dimensión de impedancia; por ende se llaman parámetros Z. Permiten obtener las tensiones de los puertos en función de sus corrientes.

De manera análoga a la del ejemplo anterior, se pueden definir 6 juegos de parámetros de los cuadripolos. Incluyendo los ya vistos; son los siguientes:

Nombre	Notación matricial	Matriz	Ecuaciones
Admitancia	$\begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \end{vmatrix} =  Y  \cdot \begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \end{vmatrix}$	$ Y  = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix}$	$I_1 = y_{11} \cdot V_1 + y_{12} \cdot V_2$ $I_2 = y_{21} \cdot V_1 + y_{22} \cdot V_2$
Impedancia	$\begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \end{vmatrix} =  Z  \cdot \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \end{vmatrix}$	$ Z  = \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{vmatrix}$	$V_1 = z_{11} \cdot I_1 + z_{12} \cdot I_2$ $V_2 = z_{21} \cdot I_1 + z_{22} \cdot I_2$
Transmisión	$\begin{vmatrix} V_1 \\ I_1 \end{vmatrix} =  \Gamma  \cdot \begin{vmatrix} V_2 \\ I_2 \end{vmatrix}$	$ \Gamma  = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$	$V_1 = A \cdot V_2 + B \cdot I_2$ $I_1 = C \cdot V_2 + D \cdot I_2$
Transmisión inversa	$\begin{vmatrix} V_2 \\ I_2 \end{vmatrix} =  \Gamma^{-1}  \cdot \begin{vmatrix} V_1 \\ I_1 \end{vmatrix}$	$ \Gamma^{-1}  = \begin{vmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{vmatrix}$	$V_2 = A' \cdot V_1 + B' \cdot I_1$ $I_2 = C' \cdot V_1 + D' \cdot I_1$
Híbridos h	$\begin{vmatrix} V_1 \\ I_2 \end{vmatrix} =  H  \cdot \begin{vmatrix} I_1 \\ V_2 \end{vmatrix}$	$ H  = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix}$	$V_1 = h_{11} \cdot I_1 + h_{12} \cdot V_2$ $I_2 = h_{21} \cdot I_1 + h_{22} \cdot V_2$
Híbridos g	$\begin{vmatrix} I_1 \\ V_2 \end{vmatrix} =  G  \cdot \begin{vmatrix} V_1 \\ I_2 \end{vmatrix}$	$ G  = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}$	$I_1 = g_{11} \cdot V_1 + g_{12} \cdot I_2$ $V_2 = g_{21} \cdot V_1 + g_{22} \cdot I_2$

El sentido de referencia para las tensiones y las corrientes para los parámetros [Y], [Z], [h] y [g] es el indicado en la figura [1], vale decir que el terminal de arriba, de cada puerto, es el positivo y la corriente entra por él. Para los parámetros [ $\Gamma$ ] y [ $\Gamma^{-1}$ ] cambia el sentido de la corriente del puerto de salida: sale por el terminal de arriba.

Cualquier juego de parámetros se puede hallar en función de los otros 5. Esto implica que hay 30 relaciones posibles entre juegos de parámetros. Para evitar el trabajo de conversión entre parámetros cada vez que se necesita, se puede utilizar la tabla de conversión incluida en el Anexo 1.

## 4. OBTENCIÓN DE LOS PARÁMETROS

Los distintos parámetros de un cuadripolo se pueden obtener de dos formas:

- Por cálculo, conociendo los componentes del cuadripolo
- Por ensayo, midiendo las tensiones y corrientes de los puertos

En ambos casos se parte de las ecuaciones correspondientes a los parámetros que se desea obtener.

### Por cálculo

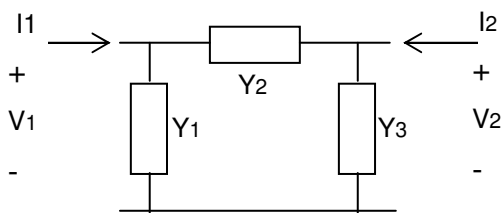
Por ejemplo, para obtener los parámetros [Y], se debe partir de las ecuaciones:

$$I_1 = y_{11} V_1 + y_{12} V_2$$

$$I_2 = y_{21} V_1 + y_{22} V_2$$

Haciendo 0 cada tensión, en cada ecuación, resulta:

$$y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} \quad y_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0} \quad y_{21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0} \quad y_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0}$$

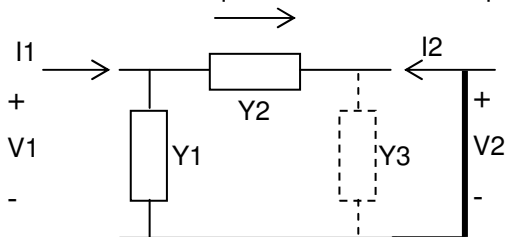


### Ejemplo 1

En el siguiente ejemplo, conocidos los componentes internos de un cuadripolo, se calculan los parámetros [Y]

Las condiciones  $V_1 = 0$  y  $V_2 = 0$ , se pueden representar haciendo sendos cortocircuitos a la entrada y a la salida. En tales casos el circuito se simplifica, con lo que se facilita el cálculo de los parámetros.

Con  $V_2 = 0$ ,  $Y_3$  puede eliminarse, ya que estando cortocircuitada por ella no circula corriente. Resulta evidente que  $Y_1$  e  $Y_2$  forman un paralelo por el que circula  $I_1$ . Entonces:



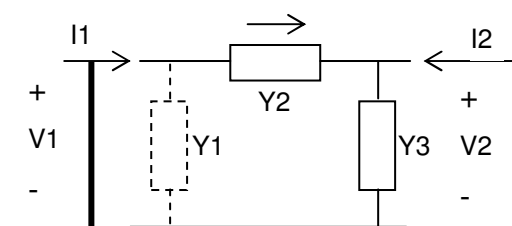
$$y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} = Y_1 + Y_2$$

Al no circular corriente por  $Y_3$ , la corriente por  $Y_2$  es  $-I_2$ . O bien  $V_1 \cdot Y_2$ .

$$-I_2 = V_1 \cdot Y_2$$

De allí:

$$y_{21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0} = -Y_2$$



En el caso en que  $V_1 = 0$ ,  $Y_1$  puede eliminarse pues por ella no circula corriente.  $Y_2$  e  $Y_3$  quedan en paralelo, con lo que resulta:

$$y_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0} = Y_2 + Y_3$$

$$y_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0} = -Y_2$$

En resumen:

$$y_{11} = Y_1 + Y_2$$

$$y_{22} = Y_2 + Y_3$$

$$y_{12} = y_{21} = - Y_2$$

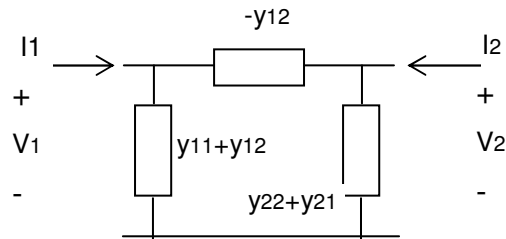
Los componentes  $Y_1$ ,  $Y_2$  e  $Y_3$  del circuito  $\pi$  se pueden expresar en función de los parámetros  $[Y]$ .

Es inmediato que  $Y_2 = -y_{12} = -y_{21}$

Luego, si en las dos primeras ecuaciones reemplazamos  $Y_2$  por  $-y_{12}$  o  $-y_{21}$ , obtenemos:

$$Y_1 = y_{11} + y_{12}$$

$$Y_2 = y_{22} + y_{21}$$



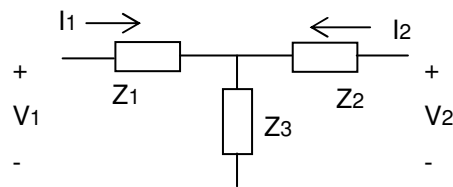
### Ejemplo 2

Hallar los parámetros  $[Z]$  del siguiente cuadripolo T de la figura.

Partiendo de las ecuaciones correspondientes a los parámetros  $[Z]$ :

$$V_1 = z_{11} \cdot I_1 + z_{12} \cdot I_2$$

$$V_2 = z_{21} \cdot I_1 + z_{22} \cdot I_2$$



Tenemos:

$$z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = Z_1 + Z_3 \quad z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} = Z_3 \quad z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} = Z_2 + Z_3 \quad z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0} = Z_3$$

El cálculo de estos parámetros se facilita teniendo en cuenta las siguientes consideraciones. Para aquellos en que  $I_2 = 0$  no hay caída de tensión en  $Z_2$ , por lo que  $V_2$  queda aplicada directamente sobre  $Z_3$  y la corriente a través de  $Z_3$  es  $I_1$ . Para aquellos en que  $I_1 = 0$  no hay caída de tensión en  $Z_1$ , por lo que  $V_1$  queda aplicada directamente sobre  $Z_3$  y la corriente a través de  $Z_3$  es  $I_2$ .

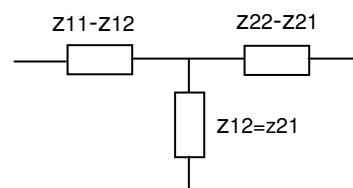
Podemos expresar los componentes del circuito T en función de los parámetros  $[Z]$ . Vemos en las ecuaciones anteriores que

$$Z_3 = z_{21} = z_{12}$$

Y reemplazando esto en las otras ecuaciones, se obtiene

$$Z_1 = z_{11} - z_{12}$$

$$Z_2 = z_{22} - z_{21}$$



### Por ensayo

La obtención de los parámetros de un cuadripolo por medio de ensayos es teóricamente sencilla.

Hemos visto que cada parámetro relaciona dos de las cuatro magnitudes que definen el estado de los puertos, bajo una determinada condición. Por lo tanto, para calcular cada parámetro se debe crear la condición que corresponde y medir las dos magnitudes que intervienen en su cálculo.

Una de estas dos magnitudes deberá ser proporcionada por una fuente, a fin de que se establezca un régimen no nulo. Por ejemplo, para hallar el parámetro  $y_{11}$ , se debe cortocircuitar el puerto de salida y medir la corriente y la tensión en el puerto de entrada. Para generar el régimen no nulo,  $V_1$  puede ser proporcionada por una fuente de tensión.

$$y_{11} = \frac{I_1}{V_1} \Big|_{V_2=0}$$

El principal inconveniente práctico para hallar los parámetros de un cuadripolo en régimen armónico, es que las magnitudes son fasores.

En particular, para hallar  $y_{11}$ , dada la condición  $V_2 = 0$ , debemos hacer el cociente de los fasores  $I_1$  y  $V_1$ , definidos cada uno por un módulo y un ángulo de fase. De tal modo,  $y_{11}$  resulta un número complejo cuyo módulo es el cociente de los módulos de  $I_1$  y  $V_1$  y su fase la diferencia de fase entre  $I_1$  y  $V_1$ .

$$y_{11} = \frac{|I_1| \angle \phi_i}{|V_1| \angle \phi_v} = \frac{|I_1|}{|V_1|} \angle (\phi_i - \phi_v)$$

Para realizar el ensayo, necesitaremos:

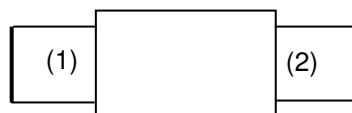
- una fuente de tensión alterna que proporcione la magnitud  $V_1$
- instrumental que permita medir módulos y desfasajes.  
Se puede utilizar un osciloscopio de dos canales para determinar las relaciones de amplitud y la diferencia de fase entre  $I_1$  y  $V_1$ .

Para calcular los demás parámetros  $[Y]$ , o parámetros de cualquier otro tipo, se procede de manera similar.

## 5. CUADRIPOLOS PASIVOS RECÍPROCOS

El Teorema de reciprocidad establece que si en una red pasiva y lineal se intercala una tensión  $V$  en una rama (1), obteniendo una corriente  $I$  en una rama (2), al intercalar la tensión  $V$  en la rama (2) se obtendrá la misma corriente  $I$  en la rama (1).

Sean (1) y (2) las ramas obtenidas al cortocircuitar los puertos de un cuadripolo pasivo y lineal<sup>1</sup>.



Al intercalar  $V$  en la rama (1) se mide  $I$  en la rama (2).

El parámetro  $y_{12}$  resulta:

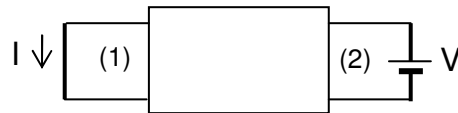
$$y_{21} = \frac{I_2}{V_1} \Big|_{V_2=0} = \frac{I}{V}$$



<sup>1</sup> En adelante omitiremos indicar que las redes son lineales, ya que la Teoría de Cuadripolos se aplica sólo a redes de ese tipo.

Por el teorema de reciprocidad, al intercalar  $V$  en la rama (2) se medirá  $I$  en la rama (1). Entonces, el parámetro  $y_{21}$  resulta:

$$y_{12} = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{V_1=0} = \frac{I}{V}$$



En consecuencia:

$$y_{12} = y_{21}$$

Vale decir que en un cuadripolo pasivo, sólo será necesario determinar 3 parámetros  $y$ .

En realidad, esta particularidad se da para todos los tipos de parámetros.

Por ejemplo, en el punto 3 vimos como se podían obtener los parámetros  $z$  en función de los  $y$ , resultando

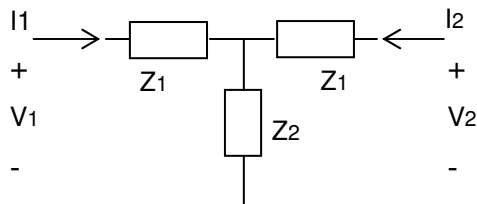
$$-\frac{y_{12}}{\Delta_y} = z_{12} \quad -\frac{y_{21}}{\Delta_y} = z_{21}$$

Luego, como  $y_{12} = y_{21}$ , se deduce que  $z_{12} = z_{21}$ .

En la tabla del Anexo 1 se indica la relación que caracteriza los cuadripolos pasivos para cada tipo de parámetros.

## 6. CUADRIPOLOS SIMÉTRICOS

Los cuadripolos simétricos son aquellos en los que el funcionamiento no cambia si se permutan los puertos de entrada y salida,



El cuadripolo de la figura es un ejemplo de ello.

Trabajando con los parámetros  $Z$ ,

$$V_1 = z_{11} \cdot I_1 + z_{12} \cdot I_2$$

$$V_2 = z_{21} \cdot I_1 + z_{22} \cdot I_2$$

Se observa que :

$$z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} = z_{22} = \frac{V_2}{I_2} \Big|_{I_1=0} = Z_1 + Z_2$$

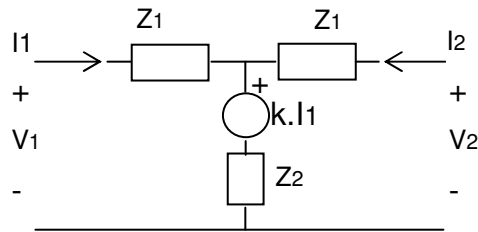
Además de la igualdad entre  $z_{12}$  y  $z_{21}$  derivada del carácter pasivo del cuadripolo, el carácter de simétrico, otorga otra simplificación:  $z_{11} = z_{22}$ .

Esto significa que un cuadripolo pasivo-simétrico, queda definido con dos parámetros  $Z$ .

Esto es válido para todos los juegos de parámetros, aunque con diferentes relaciones entre parámetros, según se muestra en la tabla del Anexo 1.

La definición dada al comienzo, significa desde un punto de vista puramente matemático, que los subíndices 1 y 2 con los que identificamos la entrada y la salida pueden permutarse sin que el funcionamiento cambie.

Los cuadripolos con fuentes dependientes, pueden ser aparentemente simétricos (en términos topológicos), pero no en su comportamiento.



El circuito de la figura es un cuadripolo de apariencia simétrica, en cuya rama central hay una fuente de tensión dependiente de la corriente  $I_1$ .

Su comportamiento cambia si permutamos entrada y salida, pues la corriente de la cual depende la fuente no puede permutarse. Esto es lo que rompe la simetría.

Calculando  $z_{11}$  y  $z_{22}$  se verifica que no son iguales, y que la diferencia la determina precisamente la fuente dependiente.

$$z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} \Rightarrow I_1 = \frac{V_1 - k \cdot I_1}{Z_1 + Z_2} \Rightarrow z_{11} = Z_1 + Z_2 + k$$

$$z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} \Rightarrow I_2 = \frac{V_2 - k \cdot I_1}{Z_1 + Z_2} \quad \text{Como } I_1 = 0 \Rightarrow z_{22} = Z_1 + Z_2$$

## 7. CONEXIONES DE CUADRIPOLOS

Dos o más cuadripolos pueden conectarse entre sí formando un nuevo cuadripolo. Veremos las distintas formas en que pueden hacerlo, y cómo se pueden calcular los parámetros del cuadripolo resultante en función de los parámetros de los cuadripolos que lo componen.

Esto se aplicará a la resolución de dos tipos de problemas:

- Dados dos o más cuadripolos conocidos, que se asocian para obtener un sistema más complejo, se quiere estudiar el comportamiento de ese sistema.
- Dado un cuadripolo que presenta cierto grado de complejidad, se lo divide en cuadripolos más simples interconectados. Se calculan los parámetros de los cuadripolos más simples y en función de ellos se obtienen los parámetros del cuadripolo original.

Por simplicidad estudiaremos la conexión entre dos cuadripolos, ya que según veremos, es evidente que se pueden extender los resultados obtenidos a la conexión de un mayor número de cuadripolos.

Hay varias formas de conectar cuadripolos entre sí que podemos clasificar en dos grupos.

El primer grupo conecta la entrada de un cuadripolo con la salida de otro. Hay una sola forma de conexión de este tipo.

El segundo grupo conecta entradas entre sí y salidas entre sí. Hay 4 formas de conexión de este tipo.

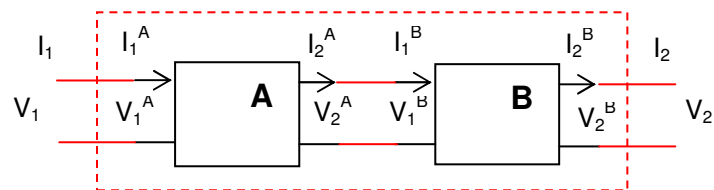
## 7.1 Conexión cascada

Se llama conexión en cascada la que corresponde al primer grupo. El puerto de salida de un cuadripolo se conecta al puerto de entrada de otro.

Puede conectarse cualquier cantidad de cuadripolos de este modo, resultando un cuadripolo cuya entrada es la del primer cuadripolo de la cadena (o la cascada), y su salida la del último.

La figura representa una cascada de 2 cuadripolos, A y B.

Como sentido de las corrientes en los puertos de salida se ha tomado el que corresponde a los parámetros transmisión. Ello se debe a que en este tipo de conexión resulta sencillo relacionar esos parámetros.



Para cada cuadripolo podemos escribir:

$$\begin{bmatrix} V_1^A \\ I_1^A \end{bmatrix} = [\Gamma^A] \cdot \begin{bmatrix} V_2^A \\ I_2^A \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} V_1^B \\ I_1^B \end{bmatrix} = [\Gamma^B] \cdot \begin{bmatrix} V_2^B \\ I_2^B \end{bmatrix}$$

Dado que la salida del cuadripolo A coincide con la entrada de B, es decir:

$$\begin{bmatrix} V_2^A \\ I_2^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1^B \\ I_1^B \end{bmatrix}$$

Podemos reemplazar en la ecuación de A la de B:

$$\begin{bmatrix} V_1^A \\ I_1^A \end{bmatrix} = [\Gamma^A] \cdot [\Gamma^B] \cdot \begin{bmatrix} V_2^B \\ I_2^B \end{bmatrix}$$

Luego, como las variables del puerto de entrada de A y las del puerto de salida de B coinciden con las de los respectivos puertos del cuadripolo resultante,

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = [\Gamma^A] \cdot [\Gamma^B] \cdot \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Entonces, la matriz transmisión del cuadripolo resultante es el producto de las matrices de A y B.

$$[\Gamma] = [\Gamma^A] \cdot [\Gamma^B]$$

Y si hubiera N cuadripolos en cascada:

$$[\Gamma] = [\Gamma^A] \cdot [\Gamma^B] \cdot \dots \cdot [\Gamma^N]$$

Ejemplo 3.

Supongamos que se conectan en cascada dos cuadripolos cuyas matrices transmisión son:

$$[\Gamma^A] = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [\Gamma^B] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$



Hallar la matriz  $\Gamma$  del conjunto.

Cuando se realiza el producto de 2 matrices, el elemento de la fila  $i$ , columna  $j$  de la matriz resultante, es igual a la suma de los productos de los elementos de igual índice de la fila  $i$  de la primera matriz por los de igual índice de la columna  $j$  de la segunda matriz.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ 1 \quad 2 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 5 \quad 4 \\ 6 \quad 5 \end{array} & \begin{array}{c} 5x2+4x1 \quad 5x3+4x2 \\ 6x2+5x1 \quad 6x3+5x2 \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} 14 \quad 23 \\ 17 \quad 28 \end{array}$$

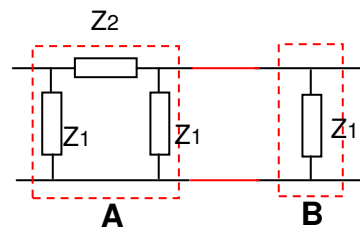
La disposición mostrada es meramente práctica, para facilitar esta operación.

Observaciones:

Ambas matrices son pasivas, pues cumplen que  $\Delta_A = 5 \times 5 - 6 \times 4 = 1$  y  $\Delta_B = 2 \times 2 - 3 \times 1 = 1$ , y simétricas pues el elemento A es igual al elemento D.

La matriz resultante obviamente es pasiva, y en efecto se verifica que  $\Delta = 14 \times 28 - 23 \times 17 = 1$ . Sin embargo, dos matrices simétricas en cascada no tienen por qué dar por resultado una matriz simétrica. En este caso, la matriz resultante no lo es, pues  $A \neq D$  ( $A = 14$  y  $D = 28$ )

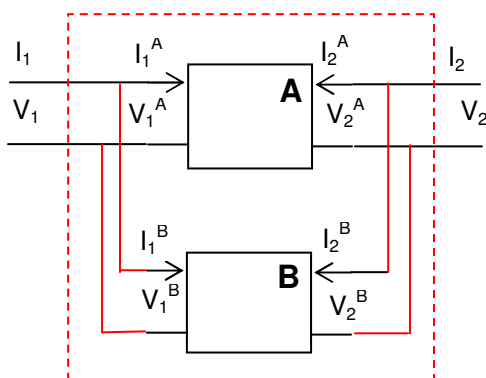
El ejemplo de la derecha muestra un caso en que dos cuadripolos simétricos, A y B, al conectarse en cascada dan por resultado un cuadripolo asimétrico.



La regla que hemos establecido para resolver la conexión cascada supone que los parámetros transmisión, calculados para un cuadripolo aislado, no se modifican si los calculamos con otro cuadripolo conectado en cascada. Esta suposición es válida pues los parámetros transmisión valen para cualquier carga (como lo es un cuadripolo conectado a la salida) o cualquier excitación (como el caso de un cuadripolo conectado a la entrada)

## 7.2 Conexión paralelo

La entrada y la salida de dos cuadripolos, A y B se conectan en paralelo. En tal caso, las tensiones de entrada y salida del cuadripolo resultante coinciden con las de cada uno de los cuadripolos, es decir:



$$V_1 = V_1^A = V_1^B$$

$$V_2 = V_2^A = V_2^B$$

Por su parte, las corrientes de entrada y salida del cuadripolo resultante son la suma de las respectivas corrientes de cada cuadripolo:

$$I_1 = I_1^A + I_1^B$$

$$I_2 = I_2^A + I_2^B$$

Si sumamos miembro a miembro las ecuaciones de los parámetros  $[Y]$  de cada cuadripolo obtenemos un resultado muy interesante.

$$\begin{aligned}
 + \begin{cases} I_1^A \\ I_2^A \end{cases} &= [Y^A] \cdot \begin{cases} V_1^A \\ V_2^A \end{cases} \\
 \begin{cases} I_1^B \\ I_2^B \end{cases} &= [Y^B] \cdot \begin{cases} V_1^B \\ V_2^B \end{cases} \\
 \hline
 \begin{cases} I_1^A + I_1^B \\ I_2^A + I_2^B \end{cases} &= ([Y^A] + [Y^B]) \cdot \begin{cases} V_1 \\ V_2 \end{cases} \\
 \Rightarrow \begin{cases} I_1 \\ I_2 \end{cases} &= [Y] \cdot \begin{cases} V_1 \\ V_2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{[Y] = [Y^A] + [Y^B]}
 \end{aligned}$$

En los primeros miembros se suman las corrientes de los cuadripolos A y B, dando por resultado las corrientes del cuadripolo resultante.

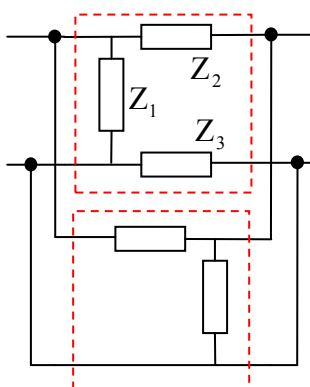
En el segundo miembro, al ser las tensiones de cada cuadripolo iguales entre sí e iguales a las del cuadripolo resultante, se pueden sacar como factor común.

Se ha utilizado la notación matricial por simplicidad, pero la misma demostración puede hacerse escribiendo las ecuaciones de los parámetros  $[Y]$ .

**Nota:** la suma de dos matrices se hace sumando los elementos de igual fila y columna. En el caso que vimos,  $[Y] = [Y^A] + [Y^B]$  significa:

$$\begin{aligned}
 y_{11} &= y_{11}^A + y_{11}^B, & y_{12} &= y_{12}^A + y_{12}^B, \\
 y_{21} &= y_{21}^A + y_{21}^B, & y_{22} &= y_{22}^A + y_{22}^B,
 \end{aligned}$$

Este análisis es válido si los parámetros de cada cuadripolo, determinados cuando está aislado, no se modifican cuando se vincula con otro cuadripolo. Eso es estrictamente correcto en la conexión cascada, en la que un cuadripolo es carga o excitación del otro, ya que una propiedad de los parámetros de los cuadripolos es su independencia de la carga y de la excitación. En las otras conexiones, uno de los cuadripolos puede modificar los parámetros del otro, por lo que lo deducido no sería aplicable.



Para mostrarlo nada mejor que un ejemplo. Consideremos los cuadripolos de la figura y determinemos el parámetro  $y_{11}$  del de arriba.

Cuando ese cuadripolo está aislado:

$$y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2 + Z_3}$$

Y cuando se le conecta el de abajo:

$$y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

La diferencia estriba en que el cuadripolo de abajo pone en cortocircuito la impedancia  $Z_3$ .

Es evidente que esto ocurre siempre que se conecta un cuadrípulo que tiene un polo común entre entrada y salida (como el de abajo), con uno que no lo tiene. En esos casos no podemos aplicar la regla hallada más arriba.

También cuando ambos cuadrípolos carecen de bornes comunes entre entrada y salida, puede haber diferencias entre los valores de los parámetros de los cuadrípolos aislados y conectados, debido a que quedan impedancias en paralelo que producen redistribuciones de corrientes y tensiones.

Cuando ambos cuadrípolos poseen bornes comunes entre entrada y salida, como en la siguiente figura, los parámetros de cada cuadrípulo no se ven afectados al conectarlos. A título de ejemplo, analicemos el parámetro  $y_{11}$  del cuadrípulo de arriba.

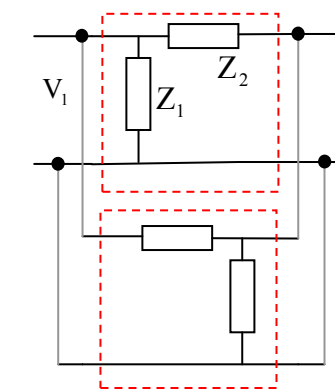
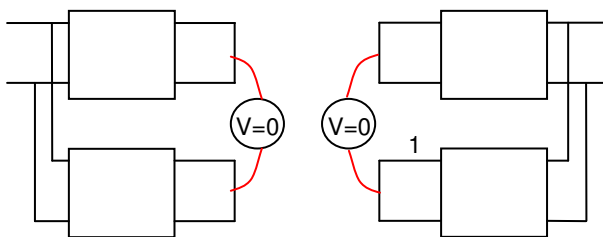
Con el cuadrípulo aislado:

$$y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

Al poner en cortocircuito la salida,  $V_2$  queda aplicada sobre ambas admitancias en paralelo. Podemos ver que nada cambia cuando conectamos el cuadrípulo de abajo.

Estos cuadrípolos con un polo común entre entrada y salida se llaman desbalanceados. Con ellos no tendremos problemas al aplicar la regla hallada para la conexión paralelo.

Como contrapartida, los cuadrípolos con impedancia no nula entre bornes de entrada y salida se llaman balanceados. Cuando un cuadrípulo de este tipo interviene en la conexión, la mencionada regla no se podrá aplicar sin un análisis previo que determine su validez.



Utilizaremos las pruebas desarrolladas por O.Brune que establecen las condiciones necesarias y suficientes para poder aplicar la suma de parámetros [Y].

Para la conexión paralelo se deben cumplir las dos condiciones que muestra la figura

### 7.3 Conexión serie

En este caso, los puertos de entrada por un lado, y los de salida por otro, se conectan en serie, con lo que las corrientes son comunes e iguales a las del cuadrípulo resultante:

$$I_1 = I_1^A = I_1^B$$

$$I_2 = I_2^A + I_2^B$$

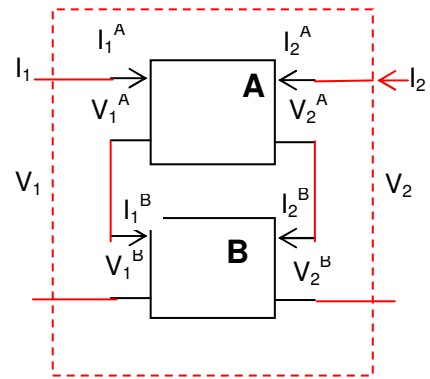
Mientras que las tensiones se suman:

$$V_1 = V_1^A + V_1^B$$

$$V_2 = V_2^A + V_2^B$$

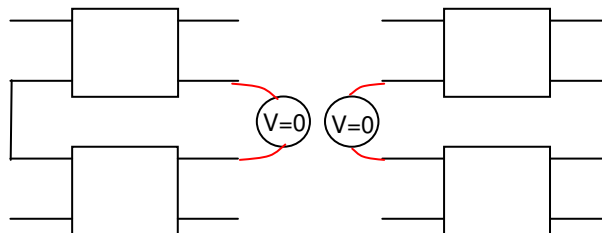
Sumando miembro a miembro las ecuaciones de los parámetros [Z]:

$$\begin{aligned}
 & \begin{matrix} |V_1^A| \\ |V_2^A| \end{matrix} = [Z^A] \cdot \begin{matrix} |I_1^A| \\ |I_2^A| \end{matrix} \\
 + & \begin{matrix} |V_1^B| \\ |V_2^B| \end{matrix} = [Z^B] \cdot \begin{matrix} |I_1^B| \\ |I_2^B| \end{matrix} \\
 \hline
 & \begin{matrix} |V_1| \\ |V_2| \end{matrix} = ([Z^A] + [Z^B]) \cdot \begin{matrix} |I_1| \\ |I_2| \end{matrix} \Rightarrow [Z] = [Z^A] + [Z^B]
 \end{aligned}$$

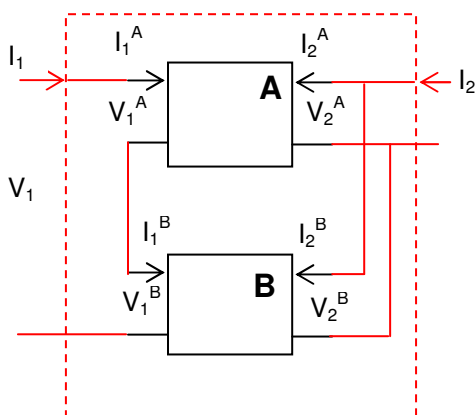


Esta regla tiene limitaciones similares a la de la conexión paralelo.

La figura muestra las condiciones necesarias y suficientes establecidas por O.Brune para poder resolver con la suma de parámetros [Z] la conexión serie entre cuadripolos.



### 7.4 Conexiones mixtas (serie/paralelo)



En esta conexión, los puertos de entrada se conectan en serie y los puertos de salida en paralelo.

De tal manera:

$$I_1 = I_1^A = I_1^B$$

$$V_2 = V_2^A = V_2^B$$

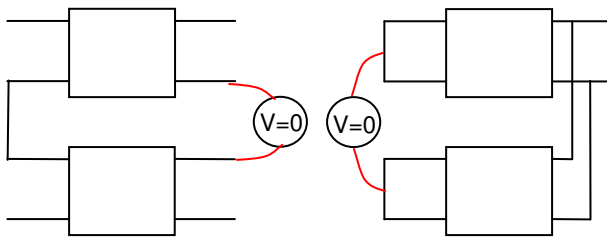
y

$$V_1 = V_1^A + V_1^B$$

$$I_2 = I_2^A + I_2^B$$

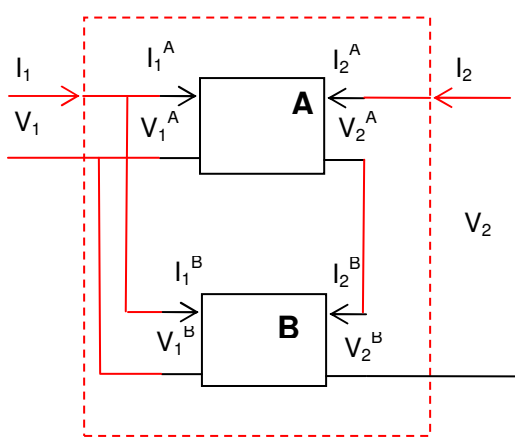
Sumando miembro a miembro las expresiones de los parámetros h:

$$\begin{aligned}
 + \begin{cases} V_1^A \\ I_2^A \end{cases} &= [H^A] \cdot \begin{cases} I_1^A \\ V_2^A \end{cases} \\
 \begin{cases} V_1^B \\ I_2^B \end{cases} &= [H^B] \cdot \begin{cases} I_1^B \\ V_2^B \end{cases} \\
 \hline
 \begin{cases} V_1 \\ I_2 \end{cases} &= ([H^A] + [H^B]) \cdot \begin{cases} I_1 \\ V_2 \end{cases} \Rightarrow [H] = [H^A] + [H^B]
 \end{aligned}$$



Esta figura muestra las condiciones de Brune para que la suma de parámetros [H] sea válida.

### 7.4 Conexiones mixtas (paralelo/serie)



Esta es la última de las conexiones posibles: los puertos de entrada conectados en paralelo y los de salida en serie.

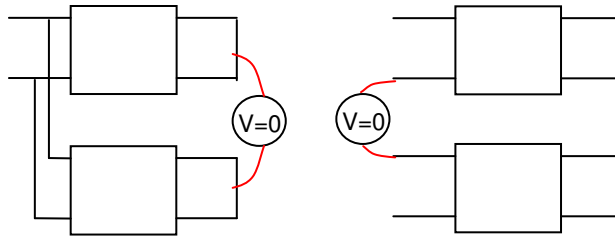
Las condiciones que la caracterizan son:

$$\begin{aligned}
 V_1 &= V_1^A = V_1^B \\
 I_2 &= I_2^A = I_2^B \\
 \text{y} \\
 I_1 &= I_1^A + I_1^B \\
 V_2 &= V_2^A + V_2^B
 \end{aligned}$$

Sumando las expresiones de las matrices [G]:

$$\begin{aligned}
 + \begin{cases} I_1^A \\ V_2^A \end{cases} &= [G^A] \cdot \begin{cases} V_1^A \\ I_2^A \end{cases} \\
 \begin{cases} I_1^B \\ V_2^B \end{cases} &= [G^B] \cdot \begin{cases} V_1^B \\ I_2^B \end{cases} \\
 \hline
 \begin{cases} I_1 \\ V_2 \end{cases} &= ([G^A] + [G^B]) \cdot \begin{cases} V_1 \\ I_2 \end{cases} \Rightarrow [G] = [G^A] + [G^B]
 \end{aligned}$$

Condiciones para que sea válida la suma de parámetros [G]:



### 7.5 Polaridad de la conexión

En todos los casos planteados, las conexiones han respetado el sentido convencional de las corrientes y tensiones en los puertos de cada cuadripolo.

Esta forma de hacer la conexión la llamaremos **normal**, y puede describirse del siguiente modo:

Quando se conectan dos puertos en paralelo, se unen entre si los terminales de la misma polaridad.

Quando se conectan dos puertos en serie, se conecta el terminal (-) de uno de ellos al terminal (+) del otro.

La conexión entre dos puertos es **invertida** cuando no sigue esas reglas.

En el siguiente cuadro se representan las conexiones serie y paralelo realizadas en forma normal y en forma invertida.

	NORMAL	INVERTIDA
PARALELO		
SERIE		

En todos los casos, se asigna la polaridad normal al cuadripolo dibujado arriba (para nosotros el "A"). La polaridad de cada puerto del cuadripolo de abajo (el "B"), resultará normal o invertida según la forma en que esté hecha la conexión.

Veamos cómo se modifican las reglas halladas si hay conexiones invertidas.

Consideremos dos cuadripolos conectados en paralelo; las entradas en forma normal y la salida en forma invertida; esto significa que para el cuadripolo B,  $I_2^B$  y  $V_2^B$  son negativas (con respecto a la convención).

En las ecuaciones de B esto se refleja de la siguiente manera:

$$I_1^B = y_{11}^B \cdot V_1^B - y_{12}^B \cdot V_2^B$$

$$-I_2^B = y_{21}^B \cdot V_1^B - y_{22}^B \cdot V_2^B$$

Y si en la segunda de ellas, multiplicamos por (-1) ambos miembros:

$$I_1^B = y_{11}^B \cdot V_1^B - y_{12}^B \cdot V_2^B$$

$$I_2^B = -y_{21}^B \cdot V_1^B + y_{22}^B \cdot V_2^B$$

El efecto de que  $I_2^B$  y  $V_2^B$  sean negativas, equivale a que  $y_{12}^B$  e  $y_{21}^B$  se consideren negativas.

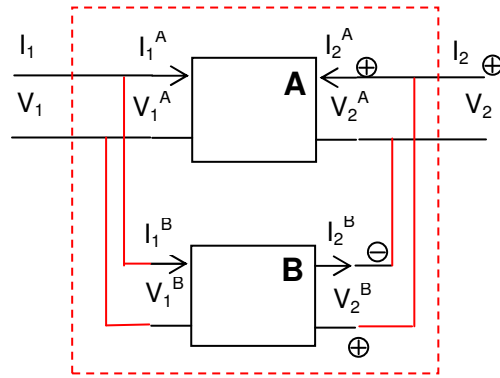
Si la inversión se produce en el puerto de entrada,  $I_1^B$  y  $V_1^B$  son negativas. Haciendo un análisis similar al anterior, se observa que el efecto también equivale a que  $y_{12}^B$  e  $y_{21}^B$  se consideren negativas.

$$-I_1^B = -y_{11}^B \cdot V_1^B + y_{12}^B \cdot V_2^B \quad \rightarrow \text{por } (-1) \rightarrow \quad I_1^B = y_{11}^B \cdot V_1^B - y_{12}^B \cdot V_2^B$$

$$I_2^B = -y_{21}^B \cdot V_1^B + y_{22}^B \cdot V_2^B \quad \rightarrow \text{por } (-1) \rightarrow \quad I_2^B = -y_{21}^B \cdot V_1^B + y_{22}^B \cdot V_2^B$$

Finalmente, si ambas conexiones, la de la entrada y la de la salida estuvieran invertidas, habría que cambiar el signo de  $y_{12}^B$  e  $y_{21}^B$  por cada una de las inversiones, con lo que en definitiva su signo no cambiaría. Entonces este caso es igual que el de ambas conexiones normales.

Cabe preguntarse qué pasa con otras conexiones y otros juegos de parámetros. En la siguiente tabla se presenta un método muy simple para poder hacer este análisis.



Inversión Conexión Parámetros	en la entrada	en la salida
<b>Paralelo</b> [Y]	$\begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \end{vmatrix}$
<b>Serie</b> [Z]	$\begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \end{vmatrix}$
<b>Serie/Paralelo</b> [H]	$\begin{vmatrix} V_1 \\ I_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_1 \\ V_2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} V_1 \\ I_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_1 \\ V_2 \end{vmatrix}$
<b>Paralelo/Serie</b> [r]	$\begin{vmatrix} I_1 \\ V_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} V_1 \\ I_2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} I_1 \\ V_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} V_1 \\ I_2 \end{vmatrix}$
<b>Cascada</b> [Γ]	$\begin{vmatrix} V_1 \\ I_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} V_2 \\ I_2 \end{vmatrix}$	
<b>Cascada</b> [G <sup>-1</sup> ]	$\begin{vmatrix} V_2 \\ I_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} V_1 \\ I_1 \end{vmatrix}$	

Las ecuaciones matriciales aquí representadas corresponden al cuadripolo "B", afectado por la inversión. Se analizan por separado la inversión de la entrada ( $I_1$  y  $V_1$  negativos) y la de la salida ( $I_2$  y  $V_2$  negativos), para cada tipo de parámetros.

El cambio de signo de cada una de estas variables, cambia los signos de los parámetros que están en la fila o en la columna afectada por la variable. En este cuadro, se han trazado líneas que cruzan las filas o columnas cuyos parámetros cambian de signo. Los parámetros cruzados por una línea cambian de signo y los cruzados por dos líneas lo cambian dos veces, es decir que no lo cambian.

Para las conexiones serie y paralelo, tanto puras como mixtas, las conclusiones son las siguientes:

- Si la conexión de uno de los puertos está invertida, ello equivale a cambiar el signo de los parámetros de la diagonal secundaria (los de subíndices 12 y 21) del cuadripolo afectado (el B).



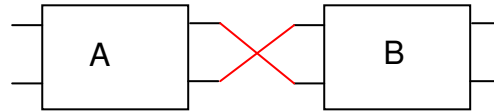
- Si la conexión de ambos puertos estuviera invertida (para analizarlo habría que superponer las dos columnas de la tabla anterior) el resultado es el mismo que con ambas conexiones normales.

En las conexiones en cascada no es común tener que analizar una conexión invertida. De todas maneras, de ser necesario, el análisis es un tanto distinto.

En esta conexión, sólo se conectan entre sí un par de puertos. (La salida de A con la entrada de B)

Si mantenemos la regla de que el cuadripolo A es la referencia y el B el afectado, debemos considerar que se invierte la entrada de B, por ende, en la tabla anterior, se

muestra sólo lo que ocurre en tal caso: cambia el signo de todos los parámetros, tanto para la matriz  $[\Gamma]$  como para  $[\Gamma^{-1}]$ .



## 8. IMPEDANCIAS DE ENTRADA Y SALIDA

### 8.1 Impedancia de entrada

La impedancia de entrada de un cuadripolo es el cociente entre la tensión y la corriente que ingresa en el puerto de entrada. Es la impedancia que presenta el cuadripolo a la fuente que lo alimenta. Naturalmente depende de la impedancia con que está cargado el cuadripolo.

De las ecuaciones correspondientes a los parámetros transmisión:

$$V_1 = A.V_2 + B.I_2$$

$$I_1 = C.V_2 + D.I_2$$

El cociente entre estas dos ecuaciones es la impedancia de entrada  $Z_1$  en función de los parámetros del cuadripolo y la impedancia de carga,  $V_2/I_2$ :

$$Z_1 = \frac{V_1}{I_1} = \frac{A.V_2 + B.I_2}{C.V_2 + D.I_2} = \frac{A \frac{V_2}{I_2} + B}{C \frac{V_2}{I_2} + D} = \frac{AZ_c + B}{CZ_c + D}$$

### 8.2 Impedancia de entrada en vacío y en cortocircuito

Para los dos casos extremos de carga, es decir vacío ( $I_2 = 0$ ) y cortocircuito ( $V_2 = 0$ ), se definen las denominadas impedancias de entrada en vacío ( $Z_{1v}$ ) e impedancia de entrada en cortocircuito ( $Z_{1c}$ ).

En las ecuaciones de los parámetros impedancia y admitancia, transcritas a continuación, se observa que  $z_{11}$  es la impedancia de entrada en vacío, mientras que  $y_{11}$  es la admitancia de entrada en cortocircuito.

$$V_1 = z_{11}.I_1 + z_{12}.I_2$$

$$I_1 = y_{11}.V_1 + y_{12}.V_2$$

$$V_2 = z_{21}.I_1 + z_{22}.I_2$$

$$I_2 = y_{21}.V_1 + y_{22}.V_2$$

También se pueden obtener en función de los parámetros transmisión, haciendo  $I_2 = 0$  y  $V_2 = 0$  respectivamente, en la anterior ecuación de  $Z_1$ .

Se obtiene lo siguiente:

$$\text{Impedancia de entrada con salida en vacío: } Z_{1v} = \frac{A}{C} = z_{11}$$

$$\text{Impedancia de entrada con salida en cortocircuito: } Z_{1c} = \frac{B}{D} = \frac{1}{y_{11}}$$

### 8.3 Impedancia de salida

La impedancia de salida  $Z_2$  de un cuadripolo es el cociente entre la tensión y la corriente que ingresa en el puerto de salida. Es equivalente a la impedancia interna de una fuente. Cuanto menor sea, mayor será la capacidad del cuadripolo de erogar potencia.

Para obtenerla, resulta apropiado emplear la matriz transmisión inversa, cuyas ecuaciones son las siguientes:

$$V_2 = A' \cdot V_1 + B' \cdot I_1$$

$$I_2 = C' \cdot V_1 + D' \cdot I_1$$

Como  $I_2$  es saliente, obtenemos  $Z_2$  haciendo el cociente entre  $V_2$  y  $-I_2$ .

$$Z_2 = \frac{V_2}{-I_2} = \frac{A' \cdot V_1 + B' \cdot I_1}{-C' \cdot V_1 - D' \cdot I_1} = \frac{A' \cdot \frac{V_1}{I_1} + B'}{-C' \cdot \frac{V_1}{I_1} - D'} = \frac{A' \cdot Z_1 + B'}{-C' \cdot Z_1 - D'}$$

Para un cuadripolo pasivo,  $A' = D$ ,  $D' = A$ ,  $B' = -B$  y  $C' = -C$ . Entonces:

$$Z_2 = \frac{D \cdot V_1 - B \cdot I_1}{C \cdot V_1 - A \cdot I_1} = \frac{D \cdot Z_1 - B}{C \cdot Z_1 - A}$$

### 8.4 Impedancia de salida en vacío y en cortocircuito

Son las impedancias de salida correspondientes a las condiciones de puerto de entrada abierto y puerto de entrada en cortocircuito.

En las ecuaciones de los parámetros impedancia y admitancia se observa que  $z_{22}$  es la impedancia de salida en vacío mientras que  $y_{22}$  es la admitancia de salida en corto.

Para obtenerlas en función de los parámetros transmisión basta con hacer  $I_1 = 0$  y luego  $V_1 = 0$  en la ecuación precedente de  $Z_2$ .

Se obtiene:

$$\text{Impedancia de salida con entrada en vacío: } Z_{2v} = \frac{D}{C} = z_{22}$$

Impedancia de salida con entrada en cortocircuito:

$$Z_{2c} = \frac{B}{A} = \frac{1}{y_{22}}$$

## 8.5 Cuadripolos simétricos

Dado que en los cuadripolos simétricos,

$$y_{11} = y_{22} \quad \text{y} \quad z_{11} = z_{22}$$

resulta:

$$Z_{1v} = Z_{2v} \quad \text{y} \quad Z_{1c} = Z_{2c}$$

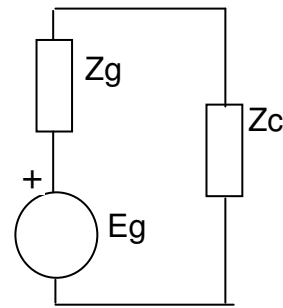
## 9. ADAPTACIÓN DE IMPEDANCIAS

### 9.1 Máxima transferencia de energía

Se dice que existe adaptación de impedancias entre una fuente de energía y una carga, cuando se produce la máxima transferencia de energía.

En un régimen sinusoidal permanente ello ocurre cuando la impedancia de la carga ( $Z_c$ ), es el conjugado de la impedancia interna de la fuente ( $Z_g$ ). Es decir:

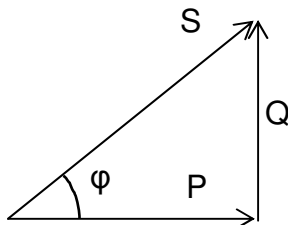
$$Z_c = \tilde{Z}_g$$



Podemos suponer que la carga está conectada a una red activa genérica, en cuyo caso  $V_g$  y  $Z_g$  son respectivamente la tensión y la impedancia de Thévenin de dicha red.

En el caso particular del régimen continuo permanente, donde las reactancias son nulas, la condición de máxima transferencia se produce cuando la resistencia de la carga y del generador son iguales.

En general cuando se habla de máxima transferencia de potencia se hace referencia a la potencia activa, que es la que produce trabajo.



Recordemos que en el régimen permanente sinusoidal, el producto de los valores eficaces de la tensión y la corriente es la llamada potencia compleja, cuya parte real es la potencia activa y la parte imaginaria es la potencia reactiva.

$$S_c = V_c \cdot I_c = P_c + jQ_c$$

$$S_c = I_c^2 \cdot R_c + j I_c^2 \cdot X_c$$

Para obtener la condición de máxima transferencia de potencia activa analicemos la ecuación:

$$P_c = I_c^2 \cdot R_c$$

Donde la corriente en la carga es: 
$$I_c = \frac{V_g}{R_c + R_g + j(X_c + X_g)}$$

Vemos que la condición  $jX_c = -jX_g$  hace mínimo el denominador; y por ende máxima la corriente y la potencia.

Establecida esa condición, 
$$P_C = I_C^2 \cdot R_C = \left( \frac{V_g}{R_g + R_C} \right)^2 \cdot R_C$$

Para hallar la resistencia de carga que maximiza la potencia debemos hallar el valor que hace 0 la derivada.

$$\frac{dP_C}{dR_C} = (V_g)^2 \cdot \frac{(R_g + R_C)^2 - 2(R_g + R_C) \cdot R_C}{(R_g + R_C)^4} = 0 \Rightarrow (R_g + R_C) - 2 \cdot R_C = 0 \Rightarrow R_g = R_C$$

Con ello queda probado que la condición de máxima transferencia de potencia activa es:

$$R_C + jX_C = R_g - jX_g, \text{ o sea: } Z_C = \tilde{Z}_g$$

La potencia máxima resulta:

$$P_{C \text{ máx}} = \frac{V_g^2}{4 \cdot R_C}$$

Cuando la tensión del generador se compone de distintas frecuencias, la adaptación de impedancias se logra a una frecuencia determinada. A frecuencias mayores o menores, la potencia transferida a la carga disminuye.

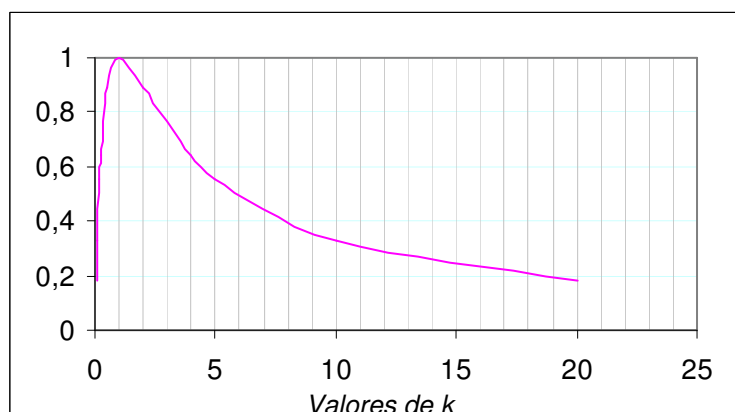
Afortunadamente para diversas aplicaciones, la potencia en la carga no es demasiado sensible a los cambios de la impedancia de carga.

Para una impedancia de carga  $Z_c = k \cdot Z_g$ , la potencia en la carga con respecto a la máxima posible se puede obtener haciendo el cociente entre las expresiones de  $P_c$  y  $P_{c \text{ máx}}$ . Resulta:

$$\frac{P_C}{P_{C \text{ máx}}} = \frac{4 \cdot k}{(k + 1)^2}$$

Esta relación produce los mismos valores para  $k$  que para  $1/k$ .

En la gráfica de la derecha se representa la ecuación anterior. Para un valor de  $k=5$ , o sea para  $Z_c = 5 \cdot Z_g$ , se ve que aún se transfiere más de la mitad de la potencia máxima. Lo mismo ocurre para  $k=1/5$ , sin embargo en esta gráfica resulta difícil de apreciar.



En general, los gráficos logarítmicos suelen ser más apropiados para esta clase de fenómenos. Si en este caso representamos en el eje de abscisas los logaritmos de  $k$ , se obtiene una gráfica simétrica donde resulta evidente que la potencia mengua de igual manera para  $k$  y  $1/k$ .

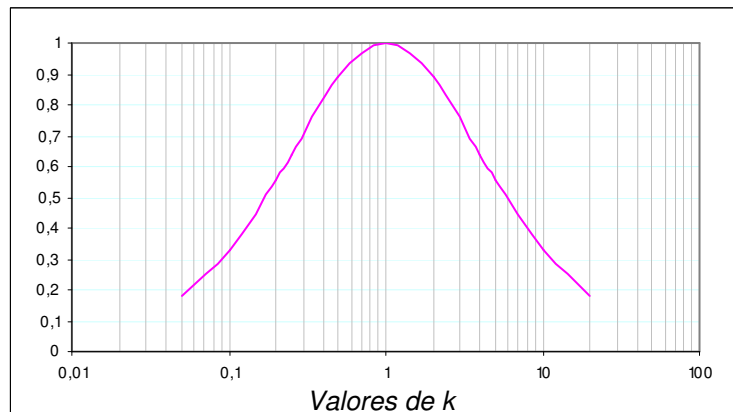
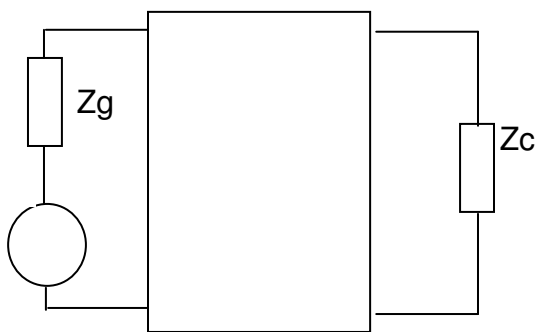


GRÁFICO LOGARÍTMICO

## 9.2 Impedancia característica de cuadripolos simétricos



Cuando el generador se vincula con la carga por medio de una línea cuya influencia no es despreciable, esta se puede representar mediante un cuadripolo, en general simétrico.

Si la impedancia de entrada de ese cuadripolo fuera igual a la impedancia de carga, el generador seguiría viendo el mismo valor de impedancia sobre sus bornes; entonces estaríamos en la condición de máxima transferencia.

Naturalmente, es la condición de máxima transferencia con el cuadripolo insertado entre el generador y la carga; si no hubiera cuadripolo, la transferencia sería mayor.

Hemos visto que

$$Z_1 = \frac{AZ_c + B}{CZ_c + D}$$

Proponiendo que la impedancia de entrada sea igual a la de carga, es decir  $Z_1 = Z_c$ , y llamando a ese valor  $Z_0$ , **impedancia característica** o **impedancia imagen** del cuadripolo, la ecuación anterior queda:

$$Z_0 = \frac{AZ_0 + B}{CZ_0 + D}$$

Despejando:

$$Z_0 = \frac{-(D-A) \pm \sqrt{(D-A)^2 + 4BC}}{2C}$$

Y como en un cuadripolo simétrico  $A = D$ :

$$Z_0 = \sqrt{\frac{B}{C}}$$

Además, como

$$Z_{1v} = \frac{B}{D} \quad \text{y} \quad Z_{1c} = \frac{A}{C} \quad \text{y} \quad Z_{2v} = \frac{D}{C} \quad \text{y} \quad Z_{2c} = \frac{B}{A}$$

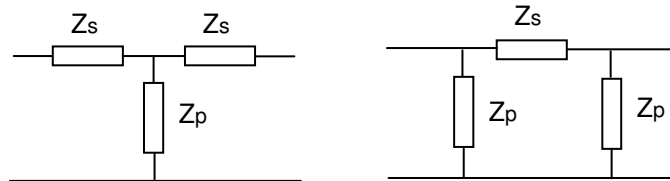
Vemos que tanto el producto de ambas impedancias de entrada como el de ambas impedancias de salida, es igual a ese radicando:

$$\left. \begin{aligned} Z_{1v} \cdot Z_{1c} &= \frac{B}{D} \cdot \frac{A}{C} = \frac{B}{C} \\ Z_{2v} \cdot Z_{2c} &= \frac{D}{C} \cdot \frac{B}{A} = \frac{B}{C} \end{aligned} \right\} \text{pues } A = D$$

Por lo tanto podemos escribir:

$$Z_0 = \sqrt{Z_{1v} \cdot Z_{1c}} = \sqrt{Z_{2v} \cdot Z_{2c}}$$

A título de ejercicio, calculemos las impedancias características de los dos cuadripolos simétricos más comunes: el T y el  $\pi$ .



Podemos recurrir a cualquiera de las dos fórmulas de  $Z_0$ . La basada en los parámetros B y C, cuyas expresiones generales se muestran a la derecha, o la basada en las impedancias de vacío y cortocircuito. Emplearemos esta última.

$$B = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{V_2=0} \quad \text{y} \quad C = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0}$$

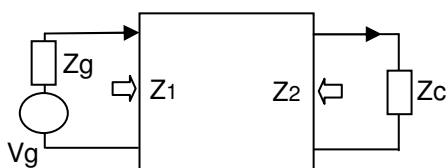
Para el circuito T:

$$\begin{aligned} Z_{1v} &= Z_s + Z_p \\ Z_{1c} &= Z_s + \frac{Z_s \cdot Z_p}{Z_s + Z_p} \end{aligned} \Rightarrow Z_0 = \sqrt{[Z_s + Z_p] \cdot Z_s + (Z_s + Z_p) \frac{Z_s \cdot Z_p}{(Z_s + Z_p)}} = \sqrt{Z_s^2 + 2 \cdot Z_s \cdot Z_p} = Z_s \cdot \sqrt{\frac{Z_s + 2 \cdot Z_p}{Z_s}}$$

Para el circuito  $\pi$

$$\begin{aligned} Z_{1v} &= \frac{Z_p \cdot (Z_s + Z_p)}{Z_s + 2 \cdot Z_p} \\ Z_{1c} &= \frac{Z_s \cdot Z_p}{Z_s + Z_p} \end{aligned} \Rightarrow Z_0 = \sqrt{\frac{Z_p \cdot (Z_s + Z_p) \cdot Z_s \cdot Z_p}{(Z_s + 2 \cdot Z_p) \cdot (Z_s + Z_p)}} = \sqrt{\frac{Z_p^2 \cdot Z_s}{Z_s + 2 \cdot Z_p}} = Z_p \cdot \sqrt{\frac{Z_s}{Z_s + 2 \cdot Z_p}}$$

### 9.3 Adaptación asimétrica

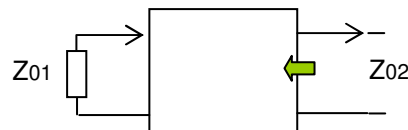
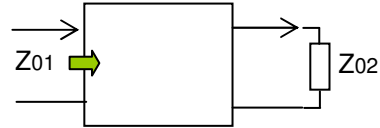


Cuando la impedancia de la fuente que excita un cuadripolo es diferente de la impedancia de carga, y estas impedancias no pueden elegirse o modificarse para lograr su igualdad, la mejor transferencia se logra cuando el cuadripolo presenta simultáneamente una impedancia de entrada igual a la de la fuente y una impedancia de salida igual a la de carga.

En tal caso, ya no es posible hablar de una impedancia característica  $Z_0$ , sino de dos: la relacionada con el puerto de entrada ( $Z_{01}$ ), que adapta la impedancia de la fuente  $Z_g$  y la relacionada con el puerto de salida ( $Z_{02}$ ), que adapta la impedancia de la carga  $Z_c$ .

Las condiciones de adaptación pueden expresarse mediante las dos reglas siguientes:

- Cuando el cuadripolo se carga con una impedancia  $Z_c = Z_{02}$ , la impedancia de entrada debe ser igual a  $Z_{01}$ .
- Cuando en la entrada se conecta una impedancia  $Z_{01} = Z_g$ , la impedancia de salida del cuadripolo debe ser igual a  $Z_{02}$ .



Recordemos las expresiones de las impedancias de entrada y salida determinadas en el punto 8.

$$Z_1 = \frac{A \cdot Z_c + B}{C \cdot Z_c + D} \qquad Z_2 = \frac{D \cdot Z_1 - B}{C \cdot Z_1 - A}$$

Aplicando las reglas anteriores:

$$Z_{01} = \frac{A \cdot Z_{02} + B}{C \cdot Z_{02} + D}$$

$$Z_{02} = \frac{D \cdot (-Z_{01}) - B}{C \cdot (-Z_{01}) - A} = \frac{D \cdot Z_{01} + B}{C \cdot Z_{01} + A}$$

En esta ecuación se ha tenido en cuenta que debido al signo de la corriente  $I_1$ ,  $Z_{01} = -Z_1$

De las dos ecuaciones anteriores se pueden despejar  $Z_{01}$  y  $Z_{02}$ .

Primero eliminamos denominadores.

La primer ecuación queda:  $C \cdot Z_{02} \cdot Z_{01} + D \cdot Z_{01} = A \cdot Z_{02} + B$

y la segunda:  $C \cdot Z_{02} \cdot Z_{01} + A \cdot Z_{02} = D \cdot Z_{01} + B$

Restándolas:  $D \cdot Z_{01} + A \cdot Z_{02} = A \cdot Z_{02} + D \cdot Z_{01}$

$$\Rightarrow 2 \cdot D \cdot Z_{01} = 2 \cdot A \cdot Z_{02} \Rightarrow \frac{Z_{01}}{Z_{02}} = \frac{A}{D}$$

Y sumándolas:  $2 \cdot C \cdot Z_{02} \cdot Z_{01} + D \cdot Z_{01} + A \cdot Z_{02} = A \cdot Z_{02} + D \cdot Z_{01} + 2 \cdot B$

$$\Rightarrow 2 \cdot C \cdot Z_{01} \cdot Z_{02} = 2 \cdot B \Rightarrow Z_{01} \cdot Z_{02} = \frac{B}{C}$$

Multiplicando y dividiendo estos resultados obtenemos ambas impedancias características:

$$Z_{01} = \sqrt{\frac{A \cdot B}{D \cdot C}} \qquad Z_{02} = \sqrt{\frac{B \cdot D}{C \cdot A}}$$

Considerando las impedancias de entrada y salida, de vacío y cortocircuito, expresadas en función de los parámetros transmisión, según se determinaron en el punto 8, resultan:

$$Z_{01} = \sqrt{Z_{1v} \cdot Z_{1c}} \quad \text{y} \quad Z_{02} = \sqrt{Z_{2v} \cdot Z_{2c}}$$

Se observa que para un cuádrupolo simétrico, en el cual  $A = D$ , se verifica el resultado obtenido en [9.2](#):

$$Z_{01} = Z_{02} = Z_0 = \sqrt{\frac{B}{C}} = \sqrt{Z_{1v} \cdot Z_{1c}} = \sqrt{Z_{2v} \cdot Z_{2c}}$$

## 10. TRANSFERENCIAS

### 10.1 Definición

En un cuádrupolo, recibe el nombre general de transferencia, el cociente entre una variable del puerto de entrada y una variable del puerto de salida.

Como en cada puerto tenemos dos variables (corriente y tensión), podemos definir 4 transferencias con los nombres y simbología mostradas en el siguiente cuadro. (Las variables de las columnas se dividen por las de las filas).

	$V_1$	$I_1$
$V_2$	$T_v$ Transferencia de tensiones	$Y_{12}$ Trans-admitancia(*)
$I_2$	$Z_{12}$ Trans-impedancia(*)	$T_i$ Transferencia de corrientes

Las inversas de estas relaciones, es decir los cocientes entre cada variable del puerto de salida (en las filas) y cada una de las del

puerto de entrada (en las columnas), también tienen el carácter de transferencias. Tendríamos entonces 4 transferencias del tipo entrada/salida y 4 del tipo salida/entrada. A los fines de cualquier teoría es redundante tratar ambos tipos, ya que uno deriva en forma inmediata del otro. En particular, la teoría de cuádrupolos emplea las transferencias del tipo entrada/salida.

(\*) En algunos libros se llaman transferencias de punto impulsor (driven point en inglés)

### 10.2 Cálculo de las transferencias

Interesa calcular las transferencias de un cuádrupolo en función de sus parámetros. Naturalmente también dependerán de la carga del cuádrupolo.

Para este cálculo, los más adecuados resultan los parámetros transferencia.

Partiendo de las ecuaciones correspondientes:

$$V_1 = A \cdot V_2 + B \cdot I_2$$

$$I_1 = C \cdot V_2 + D \cdot I_2$$



De la primera ecuación:

$$\text{dividiendo por } V_2 \quad T_v = \frac{V_1}{V_2} = A + B \cdot \frac{I_2}{V_2} = A + \frac{B}{Z_c}$$

$$\text{y dividiendo por } I_2 \quad Z_{12} = \frac{V_1}{I_2} = A \cdot \frac{V_2}{I_2} + B = A \cdot Z_c + B$$

De la segunda ecuación:

$$\text{dividiendo por } I_2 \quad T_i = \frac{I_1}{I_2} = C \cdot \frac{V_2}{I_2} + D = C \cdot Z_c + D$$

$$\text{y dividiendo por } V_2 \quad Y_{12} = \frac{I_1}{V_2} = C + D \cdot \frac{I_2}{V_2} = C + \frac{D}{Z_c}$$

Estas ecuaciones permiten calcular las transferencias para cualquier tipo de cuadripolo, con excepción de los que contienen fuentes independientes, para los cuales no se pueden definir los parámetros.

### 10.3 Transferencia de impedancia imagen

Se llaman transferencias de impedancia imagen, las transferencias de tensión o corriente de un cuadripolo pasivo y simétrico, cuando su impedancia de carga es igual a su impedancia imagen ( $Z_c = Z_0$ ).

Reemplazando  $Z_c$  por  $Z_0$  en las ecuaciones generales de  $T_v$  y  $T_i$ , y teniendo en cuenta que en los cuadripolos pasivos y simétricos:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{B}{C}} \quad ; \quad A = D \quad \text{por simetría, y} \quad A^2 - BC = 1 \quad \text{por pasivo}$$

$$T_v = A + \frac{B}{\sqrt{\frac{B}{C}}} = A + \sqrt{BC} = A + \sqrt{A^2 - 1}$$

Resultan:

$$T_i = C \cdot \sqrt{\frac{B}{C}} + A = \sqrt{BC} + A = A + \sqrt{A^2 - 1}$$

Se observa que las ecuaciones para hallar  $T_v$  y  $T_i$  son iguales y dependen sólo del parámetro  $A$ .

$A$  es la transferencia de tensión con la salida en vacío ( $I_2=0$ ) y  $D$  (igual a  $A$  en cuadripolos pasivos y simétricos) es la transferencia de corriente con la salida en cortocircuito ( $V_2=0$ ).

$$A = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0} \quad \text{y} \quad D = \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_2=0} \quad A = D \quad \text{si son simétricos}$$

Esto surge de las ecuaciones que definen los parámetros  $A$  y  $D$ :

o bien de las ecuaciones generales de  $T_v$  y  $T_i$ , considerando  $Z_c = \infty$  para la condición de vacío y  $Z_c = 0$  para la de cortocircuito.

Examinemos más en detalle los valores que pueden asumir estas transferencias cuando el cuadripolo es excitado con tensiones sinusoidales. Dada la simetría entre una y otra transferencia, podemos trabajar con  $T_v$  y extender los resultados a  $T_i$ .

En primer lugar, debemos notar que  $V_1$  y  $V_2$  son magnitudes complejas.

$$T_v = \frac{|V_1|_{\beta_1}}{|V_2|_{\beta_2}} = \frac{|V_1|}{|V_2|_{\beta_1 - \beta_2}} = |T_v|_{\beta}$$

También se puede escribir:

$$T_v = |T_v| \cdot e^{j\beta} = |T_v| \cdot (\cos\beta + j\sin\beta)$$

$$\text{con: } |T_v| = \frac{|V_1|}{|V_2|} \quad \text{y} \quad \beta = \beta_1 - \beta_2$$

Estas ecuaciones son generales para cualquier circuito de dos pares de terminales.

El módulo de la transferencia suele llamarse **razón de atenuación**. Nos dice cuantas veces más chica es la tensión de salida que la de entrada, o dicho de otro modo, cuántas veces el cuadripolo atenúa la tensión aplicada a la entrada. Por ejemplo, si  $|T_v| = 5$ , ello significa que la tensión de salida es la quinta parte de la de entrada. Valores menores que 1 indican que la tensión de salida es mayor que la de entrada; entonces se dice que el circuito, en lugar de atenuación, produce ganancia.

Por su parte,  $\beta$ , el argumento de  $T_v$ , se llama **factor de fase**. Nos indica el desfase entre las tensiones de entrada y salida, o bien, qué atraso le produce el cuadripolo a la tensión aplicada. Por ejemplo, si  $\beta = 30^\circ$ , ello significa que la tensión de salida atrasa  $30^\circ$  a la de entrada. Valores negativos de  $\beta$  indican que el cuadripolo produce adelanto de fase.

### Factor de atenuación - Nepper

Por diversos motivos es conveniente establecer una unidad logarítmica para medir la atenuación.

Entonces, así como la razón de atenuación es el módulo de  $T_v$ , su logaritmo natural se define como factor de atenuación, y se mide en Neppers (se abrevia Np):

$$\alpha[\text{Np}] = \ln |T_v| = \ln \left| \frac{V_1}{V_2} \right|$$

Para obtener la razón de atenuación en función del factor de atenuación  $\alpha$ :

$$|T_v| = \left| \frac{V_1}{V_2} \right| = e^\alpha$$

La transferencia se puede expresar en función de los factores de atenuación ( $\alpha$ ) y fase ( $\beta$ ):

$$T_V = |T_V| \cdot e^{j\beta} = e^{\alpha} \cdot e^{j\beta} = e^{\alpha + j\beta} = e^{\gamma}$$

Donde  $\gamma = \alpha + j\beta$  se llama **Transferencia compleja**

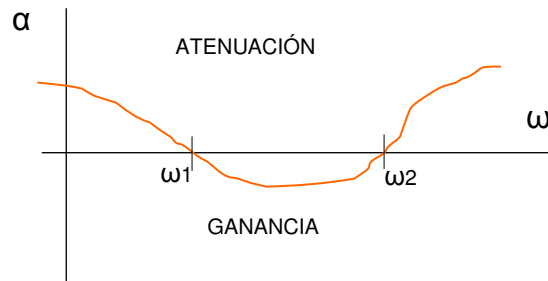
Continuando con el factor de atenuación, se observa que si  $|T_V| = 1$ , caso en que el cuadripolo no atenúa ni tiene ganancia,  $\alpha = 0$ .

Si  $|T_V| > 1$ , implica atenuación y  $\alpha > 0$ .

Si  $|T_V| < 1$ , implica ganancia y  $\alpha < 0$ .

Esto trae como ventaja para las representaciones gráficas que el plano se divide por partes iguales entre las condiciones de atenuación y ganancia.

El gráfico de la figura es un ejemplo de variación del factor de atenuación de un cuadripolo en función de la frecuencia. Se observa que en un rango de frecuencias comprendido entre  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , el cuadripolo tiene ganancia, mientras que para el resto de las frecuencias produce atenuación.



### Factor de atenuación en decibeles

Así como el Nepper (Np) da una medida de la atenuación en una escala logarítmica natural, el Bell (B) hace lo propio en una escala logarítmica decimal. Sin embargo, el Bell no se definió a partir de la relación de tensiones sino de la relación de potencias:

$$\alpha[\text{Np}] = \ln \left| \frac{V_1}{V_2} \right| = \ln |T_V| \quad \alpha[\text{B}] = \log \left| \frac{P_1}{P_2} \right|$$

Más usado es el decibel (dB), que es una subunidad del Bel: 1 B = 10 dB. Entonces:

$$\alpha[\text{dB}] = 10 \log \left| \frac{P_1}{P_2} \right|$$

Las siguientes son las potencias cuando la carga es la impedancia imagen.

Nótese que se divide por las resistencias (no las impedancias) pues se trata de potencia activa

$$P_1 = \frac{V_1^2}{R_1} = \frac{V_1^2}{R_0} \quad \text{y} \quad P_2 = \frac{V_2^2}{R_C} = \frac{V_2^2}{R_0}$$

$$\Rightarrow \alpha[\text{dB}] = 10 \log \left| \frac{V_1}{V_2} \right|^2 = 20 \log \left| \frac{V_1}{V_2} \right| = 20 \log |T_V|$$

Podemos establecer una relación entre el decibel (o el Bel) y el Nepper si despejamos  $|T_v|$  en sendas ecuaciones del factor de atenuación.

$$|T_v| = e^{\alpha [\text{Np}]} = 10^{\frac{\alpha [\text{dB}]}{20}}$$

Aplicando logaritmo decimal podemos hallar  $\alpha [\text{dB}]$  en función de  $\alpha [\text{Np}]$  y viceversa si aplicamos logaritmo natural.

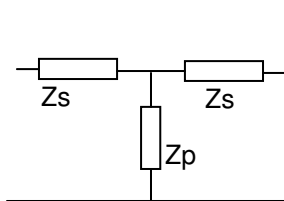
$$\Rightarrow \alpha [\text{dB}] = \underbrace{20 \log e}_{8,686} \cdot \alpha [\text{Np}] \quad \text{y} \quad \alpha [\text{Np}] = \underbrace{\frac{\ln 10}{20}}_{0,115} \cdot \alpha [\text{dB}]$$

#### Ejemplo 4

Encontrar un cuadripolo pasivo adaptado a la carga que produzca una atenuación de 10 dB cuando se lo carga con una impedancia de valor  $10 + j10$ .

La adaptación a la carga se produce cuando  $Z_0 = Z_c = 10 + j10$ .

Proponiendo un cuadripolo simétrico tipo T, tenemos 2 incógnitas:  $Z_s$  y  $Z_p$ . Debemos tratar de relacionarlas con las 2 condiciones del problema: el valor de atenuación y la impedancia característica. Comenzando con esta última:



Donde:

$$Z_0 = \sqrt{Z_{1v} \cdot Z_{1c}}$$

$$Z_{1v} = Z_s + Z_p \quad Z_{1c} = Z_s + \frac{Z_s \cdot Z_p}{Z_s + Z_p}$$

$$\Rightarrow Z_0 = \sqrt{Z_s^2 + 2 \cdot Z_s \cdot Z_p} = 10 + j10 = 14,1|_{45^\circ}$$

$$\Rightarrow Z_s^2 + 2 \cdot Z_s \cdot Z_p = 200|_{90^\circ} \quad \text{a)}$$

Aplicando la otra condición, es decir  $\alpha = 10$  dB (o sea 1 Bel), lo que equivale a  $|T_v| = 10^1 = 10$ , para un cuadripolo cargado con su impedancia imagen,

$$T_v = A + \sqrt{A^2 - 1} = 10$$

De allí:  $(10 - A)^2 = A^2 - 1 \Rightarrow 100 - 20 \cdot A = -1 \Rightarrow \frac{101}{20} = A$

A es la atenuación del cuadripolo en vacío, o sea:  $A = \frac{Z_s + Z_p}{Z_p} = \frac{101}{20}$  b)

Tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas. De b)  $Z_p = \frac{20}{81} Z_s$

Reemplazando en a)

$$Z_s^2 + \frac{40}{81} Z_s^2 = 200|_{90^\circ} \Rightarrow Z_s^2 \cdot \frac{121}{81} = 200|_{90^\circ} \Rightarrow \boxed{Z_s = 8,13|_{45^\circ}} \quad \text{y} \quad \boxed{Z_p = 2|_{45^\circ}}$$

## Ejemplo 5

Con una carga  $Z_c = 10 - j10$ , la atenuación de un cuadripolo simétrico tipo T es de  $1,28 \text{ Np}$  y la constante de fase,  $\beta = 147,3^\circ$ . Suponiendo que la impedancia de la "pata" de la T,  $Z_p = 10\Omega$  (resistiva), hallar las impedancias "serie".

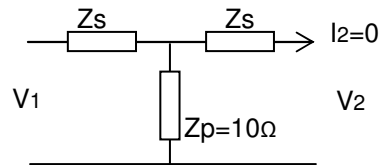
El módulo de la transferencia es  $e^\alpha$ ; entonces: si  $\alpha = 1,28 \text{ Np} \Rightarrow \left| \frac{V_1}{V_2} \right| = 3,6$

Luego:

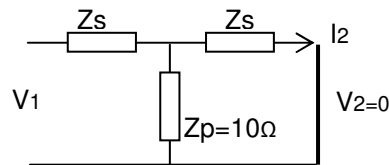
$$T = \frac{V_1}{V_2} = A + \frac{B}{Z_c} = 3,6 \Big|_{147,3^\circ}$$

Si ponemos A y B en función de las impedancias de la Te,  $Z_s$  y  $Z_p$ , podremos despejar  $Z_s$ .

$$A = \frac{V_1}{V_2} \Big|_{I_2=0} = \frac{Z_s + Z_p}{Z_p}$$



$$B = \frac{V_1}{I_2} \Big|_{V_2=0}$$



$$I_2 = \frac{V_1}{Z_s + \frac{Z_s \cdot Z_p}{Z_s + Z_p}} \cdot \frac{Z_p}{Z_s + Z_p} = \frac{V_1 \cdot Z_p}{Z_s(Z_s + Z_p) + Z_s \cdot Z_p} = V_1 \cdot \frac{Z_p}{Z_s^2 + 2Z_p Z_s} \Rightarrow B = \frac{Z_s^2 + 2Z_s Z_p}{Z_p}$$

Luego,

$$T = A + \frac{B}{Z_c} = 3,6 \Big|_{147,3^\circ} = -3 + j2 = \frac{Z_s + Z_p}{Z_p} + \frac{Z_s^2 + 2Z_s Z_p}{Z_p \cdot Z_c} = \frac{Z_s \cdot Z_c + Z_p \cdot Z_c + Z_s^2 + 2Z_s Z_p}{Z_p \cdot Z_c} = \dots$$

Reemplazando valores ( $Z_c = 10 - j10$  y  $Z_p = 10$ ),

$$= \frac{Z_s(10 - j10) + 10(10 - j10) + Z_s^2 + 2 \cdot Z_s \cdot 10}{10(10 - j10)} = \frac{Z_s^2 + (30 - j10) \cdot Z_s + 100 - j100}{100 - j100} = -3 + j2$$

$$\Rightarrow Z_s^2 + (30 - j10) \cdot Z_s + 200 - j600 = 0$$

Resolviendo esa ecuación de segundo grado y descartando la solución con parte real negativa, que implicaría una resistencia negativa:

$$Z_s = \frac{-30 + j10 \pm \sqrt{(30 - j10)^2 - 4 \cdot (200 - j600)}}{2} = \frac{-30 + j10 \pm \sqrt{j1800}}{2} = \frac{-30 + j10 \pm (30 + j30)}{2}$$

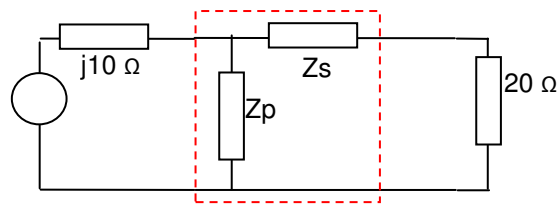
$$Z_s = j20$$

Cuando en un problema de este tipo, ambas soluciones tienen parte real negativa, significa que no hay una solución eléctrica. En cambio, la parte imaginaria, que representa la parte reactiva, puede ser positiva (inductiva) o negativa (capacitiva).

## Ejemplo 6

Un generador tiene una impedancia interna inductiva pura de  $10 \Omega$ , y se acopla a una carga resistiva de  $20 \Omega$ .

Hallar los valores de las impedancias  $Z_s$  y  $Z_p$  del cuadripolo de la figura, de manera que se logre la mejor adaptación del generador y la carga.



Se trata de una adaptación asimétrica. Hay que lograr que  $Z_{01}$  sea igual a la impedancia del generador y  $Z_{02}$  a la de la carga. En el punto 9.3 vimos cómo se obtienen estas impedancias.

$$Z_{02} = \sqrt{\frac{B \cdot D}{C \cdot A}} = \sqrt{Z_{2v} \cdot Z_{2c}} \quad Z_{01} = \sqrt{\frac{A \cdot B}{D \cdot C}} = \sqrt{Z_{1v} \cdot Z_{1c}}$$

En este problema parece mejor emplear las fórmulas con las impedancias de vacío y cortocircuito.

$$Z_{1v} = Z_p \quad Z_{1c} = \frac{Z_s \cdot Z_p}{Z_s + Z_p} \quad Z_{2v} = Z_s + Z_p \quad Z_{2c} = Z_s$$

Entonces:

$$Z_{01} = \sqrt{\frac{Z_p^2 \cdot Z_s}{Z_s + Z_p}} = Z_g \quad \text{y} \quad Z_{02} = \sqrt{Z_s \cdot (Z_s + Z_p)} = Z_c$$

Trabajamos estas 2 ecuaciones para hallar  $Z_p$  y  $Z_s$ .

$$\frac{Z_p^2 \cdot Z_s}{(Z_s + Z_p)} = Z_g^2 \quad (1) \quad Z_s \cdot (Z_s + Z_p) = Z_c^2 \quad (2)$$

En general, para simplificar la resolución de este tipo de ecuaciones de segundo grado, hay que tratar de aprovechar el hecho de que tienen términos comunes. En este caso, podemos despejar  $Z_s + Z_p$  de la segunda ecuación y reemplazarlo en la primera:

$$Z_s + Z_p = \frac{Z_c^2}{Z_s}$$

$$\frac{Z_p^2 \cdot Z_s}{\frac{Z_c^2}{Z_s}} = Z_g^2 \Rightarrow Z_s \cdot Z_p = Z_g \cdot Z_c$$

Reemplazando en la ecuación (2), nos queda como única incógnita  $Z_s$ .

$$Z_s^2 + Z_g \cdot Z_c = Z_c^2 \Rightarrow Z_s^2 = Z_c \cdot (Z_c - Z_g) \Rightarrow Z_s = \sqrt{Z_c \cdot (Z_c - Z_g)}$$

En (1):

$$Z_p^2 = \frac{Z_g^2 \cdot (Z_s + Z_p)}{Z_s} = \frac{Z_g^2 \cdot \frac{Z_c^2}{Z_s}}{Z_s} = \frac{Z_g^2 \cdot Z_c^2}{Z_s^2} = \frac{Z_g^2 \cdot Z_c^2}{Z_c \cdot (Z_c - Z_g)} \Rightarrow Z_p = \frac{Z_g \cdot Z_c}{\sqrt{Z_c \cdot (Z_c - Z_g)}}$$

Para los valores de este problema:

$$Z_s = \sqrt{20^2 - 20 \cdot j10} = 10 \cdot \sqrt{4 - j2} = \begin{matrix} \rightarrow 21,1 \angle_{-13,3^\circ} \\ \rightarrow 21,1 \angle_{-13,3^\circ + 180^\circ} = 21,1 \angle_{166,7^\circ} \end{matrix}$$

$$Z_p = \frac{Z_g \cdot Z_c}{Z_s} = \frac{j10 \cdot 20}{21,1 \angle_{-13,3^\circ}} = \begin{matrix} \rightarrow 9,5 \angle_{103,3^\circ} \\ \rightarrow 9,5 \angle_{103,3^\circ - 180^\circ} = 9,5 \angle_{-76,7^\circ} \end{matrix}$$

Debe notarse que las raíces cuadradas generan dos soluciones desfasadas 180°. Las ubicadas en el segundo y tercer cuadrante del plano complejo deben descartarse pues la parte real, correspondiente a la parte resistiva, es negativa. En este caso:

$$Z_s = 21,1|_{-13,3^\circ} = 20,53 - j4,85 \quad \text{y} \quad Z_p = 9,5|_{-76,7^\circ} = 2,18 - j9,24$$

### ANEXO 1 - TABLA DE CONVERSION DE PARAMETROS

- Notas:
- Las matrices de cada fila son equivalentes.
  - El factor que precede cada matriz multiplica cada uno de sus elementos.
  - $\Delta$  simboliza el determinante de una matriz ( $\Delta x = x_{11} \cdot x_{22} - x_{12} \cdot x_{21}$ )

	[Z]	[Y]	[Γ]	[Γ] <sup>-1</sup>	[H]	[G]
[Z]	$\begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{vmatrix}$	$\frac{1}{\Delta y} \begin{vmatrix} y_{22} & -y_{12} \\ -y_{21} & y_{11} \end{vmatrix}$	$\frac{1}{C} \begin{vmatrix} A & \Delta\Gamma \\ 1 & D \end{vmatrix}$	$\frac{1}{C'} \begin{vmatrix} D' & 1 \\ \Delta\Gamma^{-1} & A' \end{vmatrix}$	$\frac{1}{h_{22}} \begin{vmatrix} \Delta h & h_{12} \\ -h_{21} & 1 \end{vmatrix}$	$\frac{1}{g_{11}} \begin{vmatrix} 1 & -g_{12} \\ g_{21} & \Delta g \end{vmatrix}$
[Y]	$\frac{1}{\Delta z} \begin{vmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix}$	$\frac{1}{B} \begin{vmatrix} D & -\Delta\Gamma \\ -1 & A \end{vmatrix}$	$\frac{1}{B'} \begin{vmatrix} A' & -1 \\ -\Delta\Gamma^{-1} & D' \end{vmatrix}$	$\frac{1}{h_{11}} \begin{vmatrix} 1 & -h_{12} \\ h_{21} & \Delta h \end{vmatrix}$	$\frac{1}{g_{22}} \begin{vmatrix} \Delta g & g_{12} \\ -g_{21} & 1 \end{vmatrix}$
[Γ]	$\frac{1}{z_{21}} \begin{vmatrix} z_{11} & \Delta z \\ 1 & z_{22} \end{vmatrix}$	$\frac{1}{y_{21}} \begin{vmatrix} -y_{22} & -1 \\ -\Delta y & -y_{11} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$	$\frac{1}{\Delta G'} \begin{vmatrix} D' & B' \\ C' & A' \end{vmatrix}$	$\frac{1}{h_{21}} \begin{vmatrix} -\Delta h & -h_{11} \\ -h_{22} & -1 \end{vmatrix}$	$\frac{1}{g_{21}} \begin{vmatrix} 1 & g_{22} \\ g_{11} & \Delta g \end{vmatrix}$
[Γ] <sup>-1</sup>	$\frac{1}{z_{12}} \begin{vmatrix} z_{22} & \Delta z \\ 1 & z_{11} \end{vmatrix}$	$\frac{1}{y_{12}} \begin{vmatrix} -y_{11} & -1 \\ -\Delta y & -y_{22} \end{vmatrix}$	$\frac{1}{\Delta\Gamma} \begin{vmatrix} D & -B \\ -C & A \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{vmatrix}$	$\frac{1}{h_{12}} \begin{vmatrix} 1 & h_{11} \\ h_{22} & \Delta h \end{vmatrix}$	$\frac{1}{g_{12}} \begin{vmatrix} -\Delta g & -g_{22} \\ -g_{11} & -1 \end{vmatrix}$
[H]	$\frac{1}{z_{22}} \begin{vmatrix} \Delta z & z_{12} \\ -z_{21} & 1 \end{vmatrix}$	$\frac{1}{y_{11}} \begin{vmatrix} 1 & -y_{12} \\ y_{21} & \Delta y \end{vmatrix}$	$\frac{1}{D} \begin{vmatrix} B & \Delta\Gamma \\ -1 & C \end{vmatrix}$	$\frac{1}{A'} \begin{vmatrix} B' & 1 \\ -\Delta\Gamma^{-1} & C' \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix}$	$\frac{1}{\Delta g} \begin{vmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{vmatrix}$
[G]	$\frac{1}{z_{11}} \begin{vmatrix} 1 & -z_{12} \\ z_{21} & \Delta z \end{vmatrix}$	$\frac{1}{y_{22}} \begin{vmatrix} \Delta y & y_{12} \\ -y_{21} & 1 \end{vmatrix}$	$\frac{1}{A} \begin{vmatrix} C & -\Delta\Gamma \\ 1 & B \end{vmatrix}$	$\frac{1}{D'} \begin{vmatrix} C' & -1 \\ \Delta\Gamma^{-1} & B' \end{vmatrix}$	$\frac{1}{\Delta h} \begin{vmatrix} h_{22} & -h_{12} \\ -h_{21} & h_{11} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}$

Simplificaciones de parámetros para redes recíprocas y redes simétricas

Red pasiva	$z_{12} = z_{21}$	$y_{12} = y_{21}$	$\Delta\Gamma = 1$	$\Delta\Gamma^{-1} = 1$	$h_{12} = -h_{21}$	$g_{12} = -g_{21}$
------------	-------------------	-------------------	--------------------	-------------------------	--------------------	--------------------

Red simétrica	$z_{11} = z_{22}$	$y_{11} = y_{22}$	$A = D$	$A' = D'$	$\Delta h = 1$	$\Delta y = 1$
---------------	-------------------	-------------------	---------	-----------	----------------	----------------