Seminario Universitario. Material para estudiantes

Matemática

Unidad 4.
Trigonometría

Prof. Osvaldo Chapov

CONTENIDOS

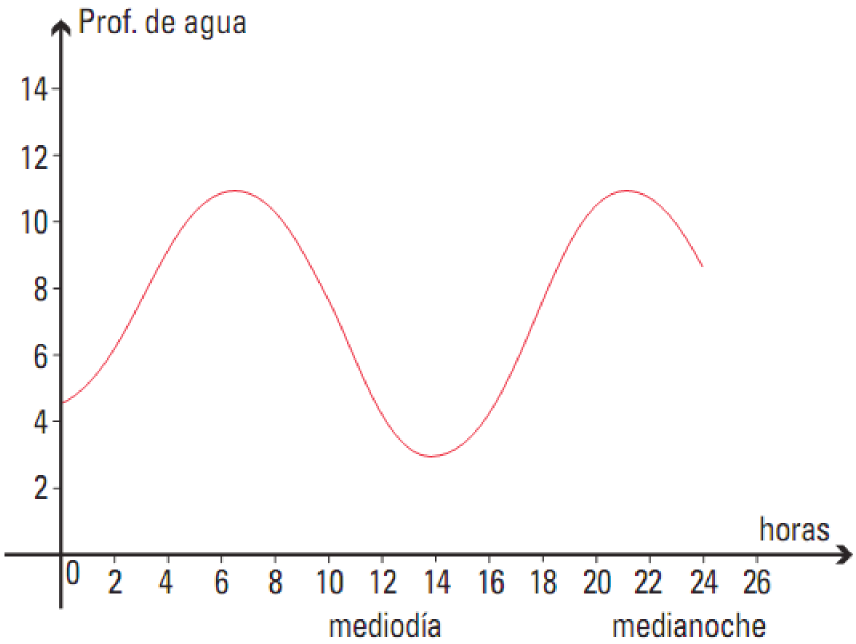
Trigonometría. Relaciones trigonométricas. Funciones trigonométricas. Resolución de triángulos. Resolución de problemas.

INTRODUCCIÓN

SITUACIONES PROBLEMÁTICAS

Situación Problemática Inicial

En el gráfico siguiente se observa como varía la profundidad del agua de un puerto a lo largo de un día.



A partir de la curva podemos deducir que:

1) La pleamar se produce, aproximadamente, dos veces al día: a las 6 hs. de la mañana y a las 22 hs.

2) La bajamar se produjo durante el día registrado aproximadamente a las 13:30 hs.

3) El nivel de agua está subiendo desde la medianoche hasta alcanzar la primera pleamar, a las 6 hs y luego vuelve a hacerlo entre las 13:30 hs. aproximadamente y a las 22 hs.

Observando la curva y conociendo que los barcos sólo pueden entrar al puerto cuando el agua es lo suficientemente profunda, ¿qué variables determinarán cuándo un barco puede entrar o salir del puerto?

En general, muchos fenómenos y situaciones de la vida diaria se comportan de forma que las funciones que los representan se repiten cuando la variable independiente tiene cambios periódicos.

Por ejemplo:

- El avance y retroceso de las mareas.
- Las fases de la luna.
- El movimiento de oscilación de un reloj de péndulo.
- La corriente eléctrica, los campos magnéticos.

UN POCO DE HISTORIA

La trigonometría, que etimológicamente significa medida de ángulos de un triángulo, estudia las relaciones entre los lados y ángulos de un triángulo.

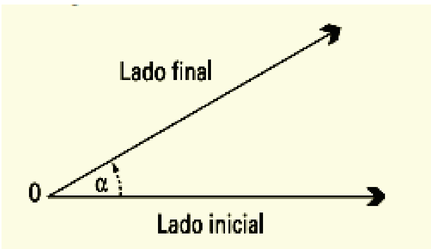
Las primeras aplicaciones se registran en la navegación y astronomía ya que el principal problema era determinar una distancia inaccesible, el movimiento de un barco en el mar en relación a las estrellas que se consideraban fijas, la distancia entre la Tierra y la Luna, anchura de ríos, altura de montañas, etc.

Luego se generalizó el estudio de la trigonometría cuando aparecieron problemas de física, química y en general, el estudio de los fenómenos periódicos como el sonido o el flujo de una corriente.

Los egipcios establecieron la medida de los ángulos en grados, minutos y segundos. Más tarde, los griegos, impulsados por el astrónomo Ptolomeo, adoptaron el sistema sexagesimal de los babilonios para medir ángulos.

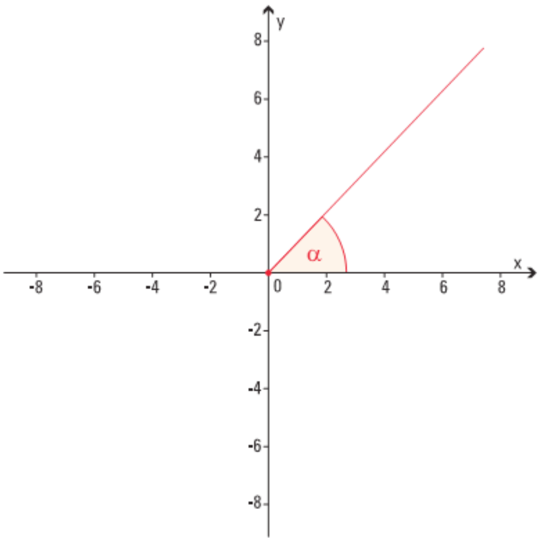
ÁNGULOS

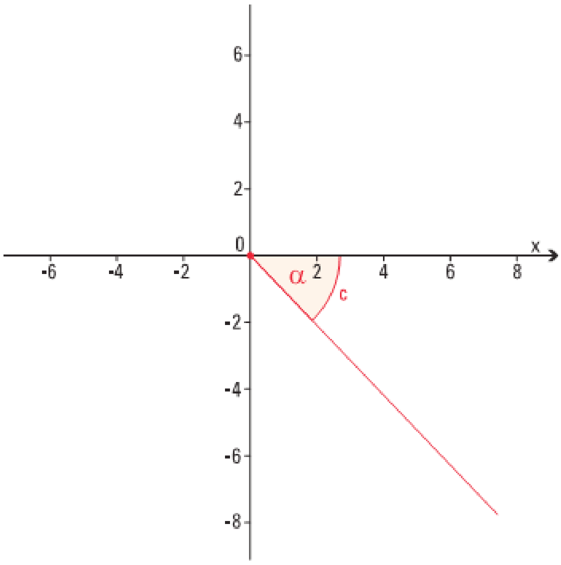
El ángulo α es la región del plano comprendida entre dos semirrectas que se intersecan en un punto O, una de las semirrectas se denomina lado inicial y la otra lado final.
Gráficamente representamos un ángulo como:



Si consideramos el ángulo situado en el plano con el sistema de ejes cartesianos, de modo que el lado inicial coincida con el semieje positivo x, el lado final puede rotar en dos direcciones.

Si rota en sentido antihorario, el ángulo es positivo y en sentido horario es negativo.





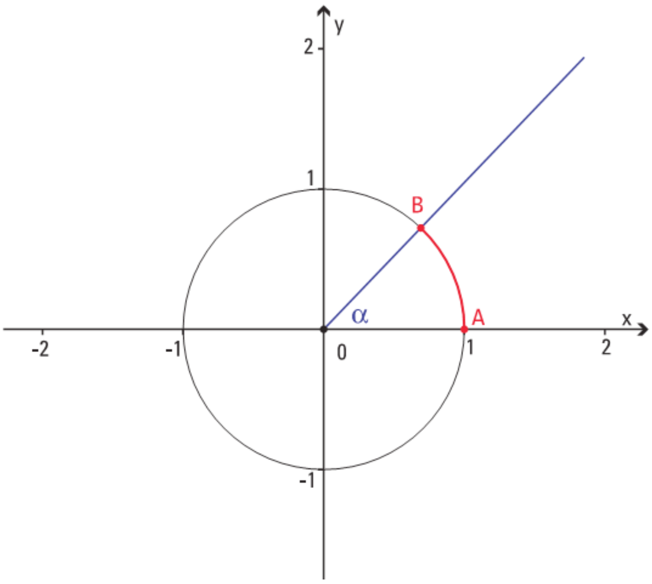
SISTEMA DE MEDICIÓN DE ÁNGULOS

El sistema de medición de ángulos que se utiliza con mayor frecuencia es el <u>*sistema sexagesimal.*</u> *Se denomina así porque cada unidad es sesenta veces mayor (o menor) que la siguiente unidad inferior (o superior).*

La unidad de medida de ángulos del sistema sexagesimal es el grado (º), que representa la subdivisión en 90 partes iguales de un ángulo recto. Cada grado se divide en 60 minutos (´) y cada minuto se divide en 60 segundos (").

Otro sistema para medir ángulos, utilizado en las funciones trigonométricas es el sistema radial, cuya unidad de medida es el radián.

El radián es el ángulo cuyo arco de circunferencia tiene una longitud igual al radio de la circunferencia.



El ángulo de un giro mide 2π *radianes, ya que el arco de circunferencia, comprendido entre sus lados inicial y final, es exactamente el perímetro de la circunferencia de radio uno.*

El número π *(pi) es la relación entre las longitudes de una circunferencia y su diámetro. Es un número irracional y junto con el número "e", es una de las constantes matemáticas que más aparece en las aplicaciones de la física e ingeniería.*

PASAJE DE UN SISTEMA A OTRO

EJEMPLO 1

¿Cuántos radianes son 225°?

$360° \longrightarrow 2\pi \text{ rad}$

$225° \longrightarrow \dfrac{2\pi \text{ rad} \times 225°}{360°} = \dfrac{5}{4}\pi \text{ rad}$

EJEMPLO 2

¿Cuántos grados son $\frac{\pi}{6}$ rad*?*

$$2\pi \text{ rad} \longrightarrow 360°$$

$$\frac{\pi}{6} \text{ rad} \longrightarrow \frac{360°.\frac{\pi}{6}}{2\pi} = 30°$$

> *Al utilizar la calculadora se puede trabajar con los dos sistemas de medidas de ángulos:*
>
> - **En modo "degree (DEG)", la calculadora considera que la medida del ángulo está representada en el sistema sexagesimal.**
>
> - **En modo "radián (RAD)", la calculadora leerá la medida del ángulo en el sistema radial.**

ACTIVIDADES ÁNGULOS

1) Expresar los siguientes ángulos en radianes:

a) $\alpha = 30º$ b) $\beta = 60º$ c) $\gamma = 120º$

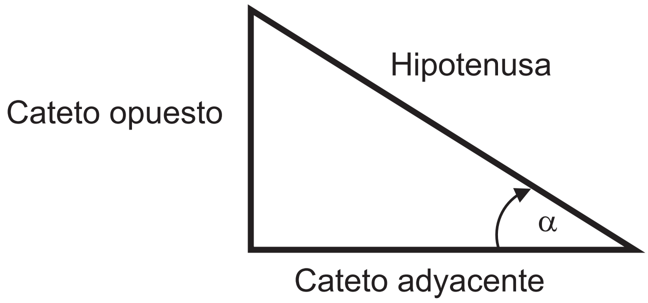
d) $\varepsilon = 45º$ e) $\phi = 270º$ f) $\omega = 150º$

2) Expresar en grados sexagesimales los siguientes ángulos:

a) $\alpha = \frac{3}{5}\pi$ b) $\beta = \frac{2}{3}\pi$ c) $\gamma = \frac{7}{4}\pi$

d) $\phi = \frac{\pi}{6}$ e) $\omega = \frac{\pi}{4}$ f) $\alpha = 1 \text{radián}$ g) $\theta = 3\pi$

Completar la tabla dibujando en todos los casos triángulos rectángulos con la medida que se da de uno de los ángulos siendo la posibilidad para el resto de los ángulos y lados, cualquier valor.



MEDIDA DE UNO DE LOS ÁNGULOS DEL TRIÁNGULO	$\frac{\text{lado opuesto}}{\text{hipotenusa}}$	$\frac{\text{lado adyacente}}{\text{hipotenusa}}$	$\frac{\text{lado opuesto}}{\text{lado adyacente}}$
$\alpha = 30^\circ$			
$\alpha = 45^\circ$			
$\alpha = 60^\circ$			

RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS

La tabla anterior demuestra que dado cualquier triángulo rectángulo las relaciones entre los lados y ángulos serán siempre las siguientes:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$

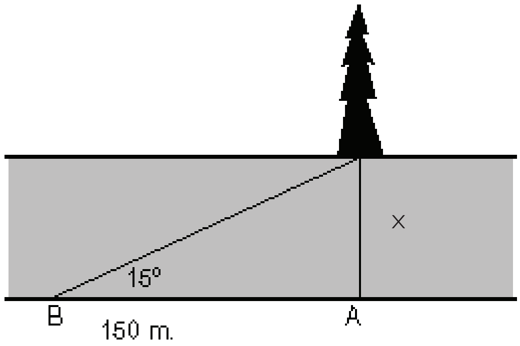
$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{cateto adyacente } \alpha}$$

También ayudará a resolver problemas, la relación pitagórica o Teorema de Pitágoras, el cual relaciona las medidas de los 3 lados de un triángulo rectángulo:

$$\textit{cateto}^2 + \textit{cateto}^2 = \textit{hipotenusa}^2$$

EJEMPLO 1

Suponiendo que se disponen de dispositivos para medir distancias y ángulos pero no se puede cruzar el río. ¿Cómo calcular el ancho del río?

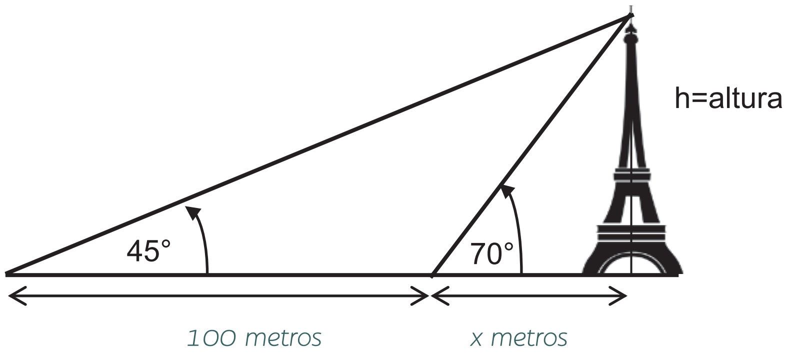


Como el ancho del río, que es desconocido y la identificamos con la letra "x", es el opuesto al ángulo medido, utilizamos la relación trigonométrica:

$$tg\ 15^\circ = \frac{x}{150} \Rightarrow x = 150.tg\ \ 15^\circ = \ 40{,}19 \text{ metros.}$$

EJEMPLO 2

Calcular la altura de la torre con las medidas que muestran la figura:



$$\left.\begin{array}{l} tg\ 45° = \dfrac{h}{100+x} \Rightarrow x+100 = \dfrac{h}{tg\ 45} = h \\[2ex] tg\ 70° = \dfrac{h}{x} \Rightarrow x = \dfrac{h}{tg\ 70°} = \dfrac{h}{2{,}74} = 0{,}36.h \end{array}\right\}$$

$$100 + 0{,}36.h = h$$

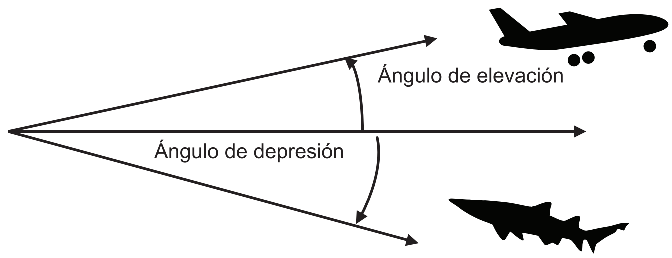
$$100 = h - 0{,}36.h = 0{,}636.h$$

$$h = \frac{100}{0{,}636} = 63{,}6 \text{ m.}$$

Cuando una persona ubicada en un punto dado, observa un objeto que está a mayor altura que él, el ángulo formado entre la visual y el horizonte se llama ángulo de elevación.

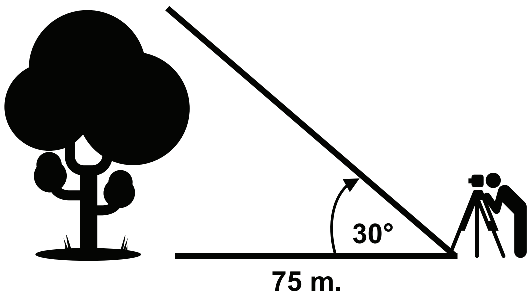
Por el contrario, si el objeto se encuentra a menor altura que la persona, el ángulo es de depresión.

Por ejemplo, cuando se visualiza un avión despegar, el observador lo hace con un ángulo de elevación y cuando una persona a nivel del mar observa un objeto dentro del mar lo hace con un ángulo de depresión



EJEMPLO 3

Se desea calcular la altura de un árbol, del cual no se puede alcanzar su cima. Con ayuda de instrumentos de medición de ángulo, se obtienen las medidas indicadas en la figura.



Por lo tanto, con las medidas obtenidas, podemos imaginar un triángulo rectángulo, del cual conocemos un ángulo, su lado adyacente y la incógnita es el lado opuesto al ángulo medido. La relación trigonométrica que nos sirve es la de:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{cateto adyacente a } \alpha} \Rightarrow \text{tg}\, 30° = \frac{\text{altura árbol}}{75}$$

$$\Rightarrow 0{,}5773 = \frac{\text{altura árbol}}{75} \Rightarrow 0{,}5773\text{x}75 = \text{altura árbol} = 43{,}2975 \text{ metros}$$

La altura del árbol, es de aproximadamente 43,29 metros.

ACTIVIDADES
RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Se sugiere dibujar todas las situaciones que se presentan a continuación.

1) Una escalera de 6,5 m se apoya contra una pared. Cuando el pie de la escalera dista 1,5 m de la pared. ¿A qué altura llega la escalera?

2) La torre de control del aeropuerto visualiza un avión con un ángulo de elevación de 15°. Si el avión está a una altura de 2000 metros ¿A qué distancia está de la torre de control?

3) Se desea construir una rampa para alcanzar una altura de 0,75 metros. Si el ángulo de inclinación es de 5°. ¿A qué distancia de la entrada debe comenzar la rampa?

4) Dos amigos remontan barriletes soltando 85 m. de hilo. Uno forma 45° con la horizontal y el otro 40°. ¿A qué altura está cada barrilete?

5) El radar de un barco indica que un objeto buscado se encuentra a 30 metros de profundidad y que el ángulo de depresión es de 15°. ¿Qué distancia debe recorrer un buzo hasta alcanzarlo?

6) Desde un edificio de 60 metros de altura se tira un cable hacia otro de 30 metros de altura. La distancia entre ellos es de 40 metros. ¿Cuántos metros de cable hay que comprar, como mínimo, para hacerlo?

7) Un avión recorre en línea recta hacia el norte 250 km., luego al este recorre 600 km. ¿A qué distancia se encuentra del punto de partida?

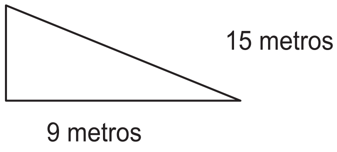
8) La diagonal de un terreno con forma de cuadrado mide 112 metros. ¿Cuánto cuesta el terreno si el metro cuadrado de tierra vale $ 25?

9) Un barco se encuentra a 800 km. del destino a donde se dirige. Luego de recorrer 200 km hacia el este, sigue su trayectoria hacia el norte. ¿Cuánto recorre en esa dirección para llegar a destino?

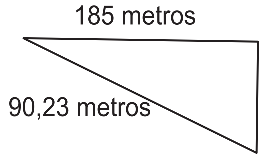
10) Matías maneja un avión a control remoto que él mismo construyó. Parado a 30 metros de su casa, hace volar el avioncito hasta la terraza que está a 16 metros de altura. ¿A qué distancia está Matías de su avioncito?

11) Calcular los ángulos y lados que faltan:

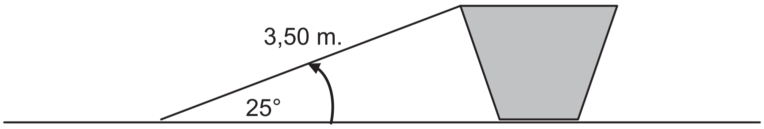
a)



b)

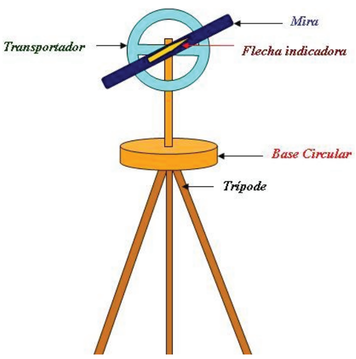


12) Para llevar con la carretilla los escombros y tirarlos en un volquete, los albañiles colocaron un tablón de 3,50 metros formando un ángulo de 25° con la vereda. ¿Cuál es la altura del volquete?



13) Una tormenta en la ciudad quebró un ciprés de la plaza. La punta cayó a 6 metros del tronco formando un ángulo de 27° con el piso. ¿A qué altura se quebró el árbol? ¿Cuál era la altura del árbol?

14) Con un teodolito situado a 54 metros de un edificio, se observa la parte más alta del mismo con un ángulo de elevación de 25°. El teodolito está colocado sobre un trípode a 1,50 metros de altura. Calcular la altura del edificio. Dibujar la situación.



El teodolito es un instrumento óptico de precisión utilizado en geodesia y topografía. Sirve para medir ángulos. El taquímetro es un teodolito que además mide distancias.

15) Un observador se encuentra al nivel del suelo a 200 m de la base de una torre de TV. Desde ahí observa la punta de la torre bajo un ángulo de depresión de 26º ¿A qué altura se encuentra la torre sobre el nivel de los ojos del observador?

16) ¿Cuál es el ángulo de elevación del Sol cuando un objeto de 6 m proyecta una sombra de 10,3 m? Respuesta: 30º 10´.

17) Un observador visualiza la parte superior de un edificio a 173 m por encima del nivel de sus ojos a un ángulo de elevación de 27º 50´. ¿A que distancia se encuentra el observador del edificio? Respuesta: 328 m.

18) Una torre de 40 m. de altura está situada a la orilla de un lago. Desde la punta de la torre el ángulo de depresión de un objeto en la orilla opuesta del lago es de 30º. ¿Cuál es el ancho del lago? Respuesta: 69,28 m.

19) Un árbol proyecta una sombra de 16,75 metros cuando el ángulo de elevación es de 32º. Calcular la altura del árbol.

Desde un faro colocado a 40 metros sobre el nivel del mar, el ángulo de depresión de un barco es de 55º. ¿A qué distancia del faro se halla el barco? Respuesta: 28 m.

21) Un topógrafo determina que desde el punto A en el suelo el ángulo de elevación hasta la cima de la montaña mide 25º. Cuando él se encuentra en un punto a 200 metros más cerca de la base de la montaña, el ángulo de elevación es de 42º. ¿Cuál es la altura de la montaña? Suponer que la base de la montaña y los dos puntos de observación están sobre la misma recta. Respuesta: 193,44 m.