Seminario Universitario. Material para estudiantes

Matemática

Unidad 2. Ecuaciones e Inecuaciones

Prof. Osvaldo Chapov

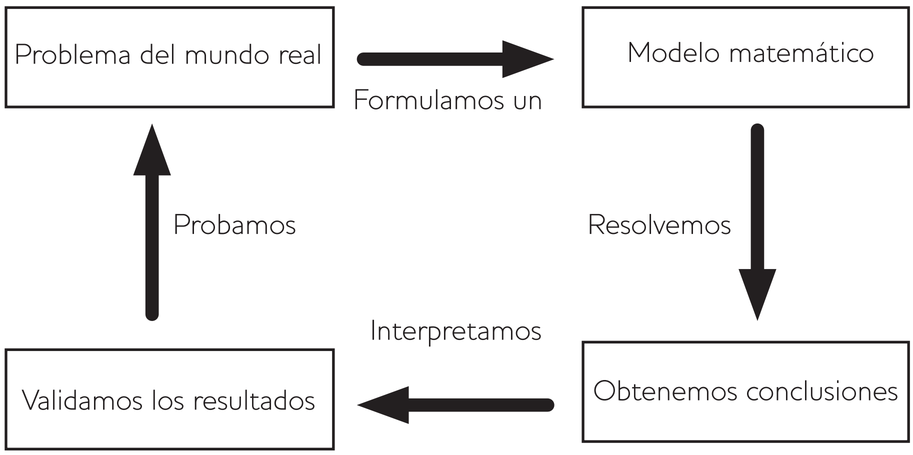
CONTENIDOS

Ecuaciones e inecuaciones. Lenguaje coloquial y algebraico. Modelización de situaciones problemáticas. Valor absoluto. Inecuaciones con valor absoluto. Interpretación física del valor absoluto y resolución de problemas.

MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

> *"Para resolver un problema referente a números o de relaciones entre cantidades, basta traducir dicho problemas al idioma algebraico, o sea, a una ecuación."* ***Isaac Newton***

Para resolver problemas de cualquier índole, de la vida cotidiana, de las ciencias, de ingeniería, de ciencias sociales, se deben utilizar herramientas de modelización matemática. Pero, ¿cuál es el significado de modelizar matemáticamente una situación problemática?



Un modelo matemático es una descripción matemática, generalmente mediante una ecuación o una función, de un fenómeno del mundo real, como por ejemplo el tamaño de una población, la demanda de un producto, la velocidad de un objeto que cae, la concentración de una sustancia en una reacción química, el costo de la reducciones de emisiones, etc. El propósito de este modelo es hacer predicciones respecto al comportamiento futuro y anticipar resultados ante posibles situaciones emergentes.

Una vez que se especifica un problema del mundo real, se formula un modelo matemático identificando variables independientes y dependientes, hacer supuestos o hipótesis que simplifiquen el fenómeno, utilizar nuestros conocimientos de las situaciones físicas y obtener ecuaciones que relacionen las variables. A partir de esta representación numérica, se puede realizar una representación gráfica o viceversa.

La segunda etapa consiste en aplicar las técnicas y habilidades matemáticas de las que disponemos para diseñar el modelo con el objetivo de obtener conclusiones matemáticas.

En la tercera etapa, interpretamos esos resultados en el fenómeno de la vida real. Luego en la última etapa, validamos estos resultados, probando los datos y verificando si es viable la solución hallada. Generalmente, necesitamos afinar nuestro modelo y hacer ajustes sucesivos.

Un modelo matemático es una idealización. Un buen modelo simplifica la realidad lo suficiente para permitir cálculos matemáticos pero es lo suficientemente preciso para proveer conclusiones válidas. En la Unidad 3 podremos revisar modelos funcionales que se utilizan para muchas situaciones problemáticas pero es en esta etapa, repasaremos las técnicas y habilidades matemáticas que permiten resolver ecuaciones e inecuaciones.

SECUENCIA RECOMENDADA PARA RESOLVER UN PROBLEMA

1) **Comprender el problema:**
De la lectura profunda del texto debería obtenerse:
- ¿Cuáles son los datos? (lo que conocemos).
- ¿Cuáles son las incógnitas? (lo que buscamos).
- La relación entre los datos y las incógnitas.
- Un esquema o dibujo de la situación, si es posible.

2) **Diseñar un plan para resolverlo:**
- Algunas cuestiones que se pueden generar en el camino son:
- ¿Este problema es parecido a otros que ya conocemos?
- ¿Se puede plantear el problema de otra forma?
- Imaginar un problema parecido pero más sencillo.
- Suponer que el problema ya está resuelto; ¿cómo se relaciona la situación de llegada con la de partida?
- ¿Se utilizan todos los datos cuando se hace el plan?

3) **Poner en práctica el plan:**
Al ejecutar el plan se debe comprobar cada uno de los pasos.
- ¿Se puede ver claramente que cada paso es correcto?
- Antes de hacer algo se debe pensar: ¿qué se consigue con esto?
- Cuando se tropieza con alguna dificultad que nos deja bloqueados, se debe volver al principio, reordenar las ideas y probar de nuevo.

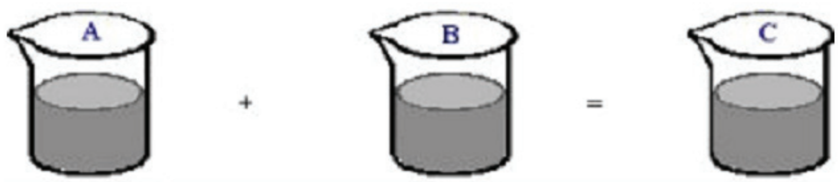
4) **Comprobar los resultados:**
- Supone la confrontación con contexto del resultado obtenido por el modelo del problema que hemos realizado, y su contraste con la realidad que queríamos resolver.
- Leer de nuevo el enunciado y comprobar que lo que se pedía es lo que se ha averiguado.
- Debemos fijarnos en la solución. ¿Parece lógicamente posible?
- ¿Se puede comprobar la solución?
- ¿Hay algún otro modo de resolver el problema?
- ¿Se puede hallar alguna otra solución?

SITUACIONES PROBLEMÁTICAS RESUELTAS

Situación Problemática 1

Un farmacéutico debe preparar 15 ml. de gotas especiales para un paciente con glaucoma. La solución debe tener 2% de ingrediente activo, pero sólo tiene disponibles soluciones al 10% y al 1%. ¿Qué cantidad de cada solución debe usar para completar la receta?

Resolución: llamamos x a la cantidad de ml de la solución al 10 %.
Un esquema que puede ayudarnos es el siguiente:



Solución al 10% Solución al 1% Solución al 2%

	A	B	C
Cantidad de ml en cada caso	x	x - 15	15
Cantidad de ingredientes activos en cada caso	0,1.x	0,01.x.(15-x)	0,02.15

Por lo tanto, la ecuación que modeliza el problema es:
$0{,}1.x + 0{,}01.x.(15-x) = 0{,}02.15$

Resolviendo, da , significa que se deben usar 1,7 ml de la solución al 10% y 8,3 ml de la solución al 1% para obtener 15 ml de solución al 2%.

Situación Problemática 2

El costo de concretar la fabricación de un producto, emprendimiento iniciado por un grupo de socios, es de $60.000. Alguien apunta que si fueran dos socios menos, deberían pagar cada uno $ 2500 más. ¿Cuántos socios hay en total y cuánto le corresponde pagar a cada uno?

Resolución
Si denominamos x = número de socios y organizando la información en una tabla:

Número de socios	Cantidad a pagar por socio
x	$\frac{60000}{x}$
x-2	$\frac{60000}{x-2}$

Por lo tanto, la ecuación a resolver es: $\frac{60000}{x} = \frac{60000}{x-2} + 2500$

Las soluciones (cuyo método desarrollaremos más adelante),
son x = 8 o x = – 6.

Obviamente la solución correcta es la positiva, por lo tanto son 8 socios y a cada uno le corresponde pagar $ 7.500.

Situación Problemática 3

Dos grifos de agua llenan un estanque en 10 horas. Uno de ellos, el grifo A, abierto solamente, tardaría 5 horas más que el otro, grifo B. Determinar las horas que tardaría en completar el estanque cada grifo por separado.

Resolución
Denominamos t = tiempo empleado por el grifo A en llenar el estanque.
Luego, el otro grifo, B, demora t – 5.
Organizando la información en una tabla:

Grifo	Tiempo que tarda en llenar el estanque, en horas.	Cantidad de la tarea que realiza en una hora
A	t	$\frac{1}{t}$
B	t – 5	$\frac{1}{t-5}$
Juntos A y B	10	$\frac{1}{10}$

Luego, la ecuación que resuelve el problema es: $\frac{1}{t}+\frac{1}{t-5}=\frac{1}{10}$

Resolviendo, resulta en $t_1 \approx 22{,}8$, $t_2 \approx 2{,}2$. Como no puede tardar 2,2, la respuesta es 22,8 horas necesita cada grifo trabajando por separado.

ECUACIONES

Los problemas anteriores fueron ejemplos de los pasos a seguir que se recomiendan para encarar cualquier situación problemática donde se pueda modelizar matemáticamente mediante ecuaciones.

¿QUÉ ES UNA ECUACIÓN?

3+2 = 5	Igualdad numérica
$(x+y)^2 = x^2 + 2.x.y + y^2$	Igualdad numérica

Además, las igualdades algebraicas pueden ser:

Igualdad algebraica

Identidad

Se verifica para cualquier valor de sus letras

Ecuación

Se verifica para algún valor de sus letras, llamadas incógnitas

Las soluciones de una ecuación son los valores que al sustituirlos en las incógnitas verifican la igualdad.

¿Siempre es posible calcular la solución de una ecuación?

¿Las soluciones son únicas?

LENGUAJE COLOQUIAL Y ALGEBRAICO

Para poder plantear y resolver situaciones problemáticas es necesario manejar la equivalencia entre el lenguaje común y el lenguaje algebraico. La tabla siguiente muestra algunos ejemplos que sirven como punto de partida para plantear problemas.

Lenguaje Coloquial	Lenguaje simbólico
Un número cualquiera	x
La mitad de un número	$\frac{1}{2}x = \frac{x}{2}$
El triple de un número	$3.x$

El siguiente de un número	$x + 1$
El anterior ,del doble de un número	$2.x - 1$
El doble ,del anterior de un número	$2.(x-1)$
El cuadrado de un número	x^2
El posterior del cubo de un número	$x^3 +1$
La suma de dos números pares consecutivos.	$x + (x+2)$

EJEMPLOS RESUELTOS

EJEMPLO 1

Hallar si existe, la solución de la ecuación $2.x+3 =5$

$2.x+3 =5$

$2.x+3 -3=5-3$

Sumando el opuesto de un número en ambos términos, no se modifica la ecuación. ¿Por qué?

$2.x=2$

$$2.\frac{1}{2}.x = 2.\frac{1}{2}$$

Multiplicando por el inverso en ambos términos de manera conveniente, no se modifica la ecuación. ¿Es válido para un número negativo?

$x = 1$

Al resolver la ecuación anterior, se halla que tiene una única solución.

Seguramente habrás notado que no es la metodología clásica para resolver una ecuación, pero matemáticamente es lo que justifica los pasos que mecánicamente realizás cuando resolvés una ecuación.
La terminología que se usa: "si está sumando, pasa restando",es incorrecta y puede llevar a errores matemáticos.

EJEMPLO 2

Calcular, si existe, la solución de la ecuación 3.x - x = 2x .

$$\left.\begin{aligned} 3.x - x &= 2.x \\ 2x &= 2x \\ 2x - 2x &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

No se obtienen resultados para la incógnita, además se llega a un resultado verdadero, ya que 0=0, por lo tanto se concluye que existen infinitas soluciones y la ecuación se verifica para cualquier número real.

EJEMPLO 3

Hallar si existe, la solución de la ecuación x + 5 = x.

$$\left.\begin{aligned} x + 5 &= x \\ 5 &= x - x \\ 5 &= 0!! \end{aligned}\right\}$$

En este caso se obtiene un resultado falso, por lo que no existe número que satisfaga la ecuación dada. Sin solución.

EJEMPLO 4

Resolver

$$\frac{x+1}{5} = \frac{3x-9}{3}$$
$$3(x + 1) = 5(3x - 9)$$
$$3x + 3 = 15x - 45$$
$$3 + 45 = 15x - 3x$$
$$48 = 12x$$
$$x = 4$$

EJEMPLO 5

$$\frac{x}{4} + \frac{x}{6} + \frac{x}{18} = 578$$
$$\frac{9x + 6x + 2x}{36} = 578$$
$$17x = 20.808$$
$$x = 1.224$$

EJEMPLO 6

De un depósito lleno de líquido se saca la cuarta parte del contenido, después la mitad del resto y quedan aún 1500 litros. Plantear una ecuación y calcular la capacidad del depósito.

Capacidad del depósito	x
La cuarta parte	$\frac{1}{4}x$
Mitad del resto	$\frac{1}{2}.\left(x-\frac{1}{4}x\right)$
Quedan aún	1500 litros

$$x = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}.\left(x-\frac{1}{4}x\right) + 1500$$

$$x = \frac{1}{4}x + \frac{3}{8}x + 1500$$

$$x - \frac{1}{4}x - \frac{3}{8}x = 1500$$

$$\frac{3}{8}x = 1500$$

$$x = \frac{1500}{\frac{3}{8}} = 4000$$

ACTIVIDADES MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

1) Expresar las siguientes oraciones en lenguaje algebraico:

Un número aumentado en 5 unidades	
Un número disminuido en 8 unidades	

El cuadrado de un número aumentado en 2 unidades	
La tercera parte de un número	
El triple de un número disminuido en 7 unidades	
El 12% de un número	
Dos número pares consecutivos	
La suma de tres número consecutivos	
El cuadrado de un número menos el número	
Un joven tiene 15 años de edad. Representar su edad hace x años y dentro de x años	
Un joven tiene x años. Representar su dentro de dos años y dentro de m años.	
La suma de 2 números pares consecutivos	
Representar el número de pesos que hay en "x" billetes de 5 pesos, "y" billetes de 10 pesos y "z" billetes de 20 pesos.	
Tu edad dentro de x años	
El doble del anterior de un número	
El cuadrado del consecutivo de un número	
El cubo de la suma entre 2 y x	

2) En los siguientes problemas, plantear una ecuación, resolverla y verificar la respuesta hallada.

a) El triplo de un número es igual al número aumentado en 8.

b) Juan y Luis tienen juntos $50. Juan tiene $12 más que Luis. ¿Cuántos pesos tiene cada uno?

c) Determinar 3 número consecutivos cuya suma sea 63.

d) Dividir un ángulo de 60 grados en dos partes cuyas medidas estén en la razón 5/7.

e) La diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos es 61. Determinar los números.

f) Determinar dos números pares consecutivos cuya suma sea 126.

g) Una empresa obtuvo ganancias por 30000 dólares en 3 años. En el segundo año ganó el doble de lo que había ganado en el primero y en el tercer año ganó tanto como en los dos años anteriores juntos. ¿Cuánto ganó en cada año?

h) Hay cuatro números cuya suma es 90. El segundo es el doble del primero, el tercero es el doble del segundo y el cuarto es el doble del tercero. Hallar dichos números.

i) Un terreno rectangular tiene 40 metros más de largo que de ancho. Si tuviese 20 metros menos de largo y 10 metros más de ancho, su área sería la misma. Calcular las dimensiones.

j) Determinar un número, que disminuido en sus 2/3 partes equivale a su duplo disminuido en 25.

k) Se desea vender una pieza de tela y solo se presentan tres clientes: el primero compra las dos terceras partes de la pieza, la segunda la cuarta parte de lo que queda y la tercera las dos séptimas partes de lo que llevó la primera, menos la segunda. Si aún sobra un metro de tela. ¿Cuántos metros tenía la pieza originalmente?

l) Un ingeniero distribuye de la siguiente manera la superficie de un terreno para las instalaciones y edificios de un club: $\frac{3}{10}$ para la cancha de fútbol; $\frac{1}{5}$ para canchas de básquet; $\frac{1}{20}$ para natatorios y vestuarios; y $\frac{1}{4}$ para gimnasios y edificios. La parte restante de 3405,50 m^2 la destina para jardines. ¿Cuál es el área del terreno?

m) El precio de un televisor, después de un descuento del 25% es de $1800. ¿Cuál es el precio antes del descuento?

n) El precio de venta de una computadora, después de un descuento del 15% es de $ 2500. ¿Cuál era el precio antes del descuento?

o) Se implementa un nuevo software para ingenieros. En tres años se vendieron a diversos estudios de ingeniería por un total de $ 16000.
En el segundo año se vendió un 20% más que en el primero, y en el tercero las ventas duplicaron el total de los dos años anteriores. ¿Cuánto se vendió en cada año?

p) El precio de un hardware sufrió un aumento del 3% del valor original. Si el precio actual en el mercado es de $380. ¿Cuál fue el precio original del hardware?

q) El precio de un software, después de un descuento del 23,75% es de $315. ¿Cuál es el precio antes del descuento? Si al precio original se le recarga un 23,35% por pago en cuotas. ¿Cuál es el monto total pagado?

r) Una empresa ha obtenido beneficios durante 4 años por un total de $250000. En el segundo año obtuvo el 30% más del primer año, en el tercer año la tercera parte del primer año y en el cuarto año el 35,75 % menos del primer año. ¿Cuál fue el beneficio de cada año?

3) Resolver las siguientes ecuaciones lineales:

a) $x + 9x = 90$

b) $-2x + 1 = 3$

c) $2(3x - 2) - (x - 3) = 8$

d) $x - 1 - \frac{x-2}{2} + \frac{x-3}{3} = 0$

e) $21 - 7x = 41x - 123$

f) $\frac{1}{6}(a+8) = \frac{3-2a}{4} + 2a - \frac{73}{12}$

g) $\frac{3m-11}{20} - \frac{5m-1}{14} = \frac{m-7}{10} - \frac{5m-6}{21}$

h) $\frac{2t}{15} - \frac{3t-5}{20} = \frac{t}{5} - 3$

i) $5(20 - x) = 4 \cdot (2x - 1)$

k) $\frac{z-1}{3} - \frac{z+3}{2} = 5z$

4) El perímetro de un rectángulo es 216 metros. Si el doble del ancho excede en 7 metros a los tres cuartos del largo, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?

5) El perímetro de un triángulo isósceles es 180 cm. Cada uno de los lados iguales es 30 cm mayor que la base. ¿Cuál es la longitud de cada lado?

VALOR ABSOLUTO DE INECUACIONES

El peso máximo que soporta el ascensor es de 150 kg.
La cantidad de solución no debe superar los 3 mg.
El precio de la pieza de respuesto varía entre $120 y $250.

Para modelizar situaciones como las anteriores, se utilizan desigualdades o inecuaciones. Revisaremos ahora los conceptos de intervalos, valor absoluto o módulo de un número real y sus propiedades, ecuaciones, ecuaciones con valor absoluto, inecuaciones, inecuaciones con valor absoluto.

Los intervalos, que usan como soporte la recta real para su interpretación, son un elemento muy útil para el análisis de funciones que trabajaremos más adelante.

El trabajo con valor absoluto o módulo, sumado al de ecuaciones e inecuaciones, permitirá facilitar la resolución de ciertas expresiones, simplificándolas; favoreciendo así, en los futuros ingenieros, el conectar y entrelazar conceptos matemáticos a fin de poderlos aplicar en problemas prácticos de la ingeniería.

INTERVALOS

Los intervalos son partes de la recta numérica, es decir, son subconjuntos de los números reales.

Recordemos la simbología utilizada para las desigualdades

$2 < 5$ ⟶ 2 es menor que 5

$5 > 2$ ⟶ 5 es mayor que 2

$2 \leq 5$ ⟶ 2 es menor o igual a 5. Con cualquiera de las condiciones que se cumpla la desigualdad es verdadera.

$2 \leq 2$ ⟶ 2 es menor o igual a 2. Como cumple una de las condiciones, es verdadera.

Intervalos finitos

Abiertos

Significa que los extremos del intervalo no están incluidos en el mismo. Se utiliza una simbología convencional de la siguiente manera:

Notación: (a,b) ó $a < x < b$

Gráfico:

Cerrados

Significa que los extremos del intervalo están incluidos en el mismo. La simbología es:

Notación: $[a,b]$ ó $a \le x \le b$

Gráfico:

Intervalos infinitos

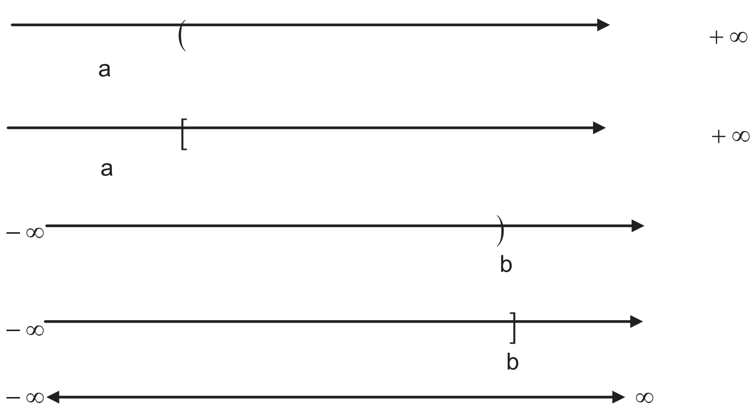
(a,∞)

$[a,\infty)$

$(-\infty,b)$

$(-\infty,b]$

$(-\infty,\infty)$



RESOLUCIÓN DE INECUACIONES

Ahora bien, ¿resolver un problema que se ha modelizado mediante una inecuación, implica el mismo procedimiento que una ecuación?

Consideramos

$3.x+1=2$ ⟶ Ecuación dada por una igualdad

$3.x+1\le 2$ ⟶ Inecuación dada por una desigualdad

Para verificar si
os procedimientos que se utilizan para resolver ecuaciones, sirven para las inecuaciones, analizaremos algunas situaciones.
Dada una inecuación, probemos que tipo de operaciones podremos hacer sin modificar las inecuaciones, al igual que en las ecuaciones.

Dada la desigualdad 3 < 4, verifiquemos si multiplicando por un número a ambos términos, la desigualdad se conserva.

$$\left.\begin{array}{l} 3 < 4 \\ 3.2 < 4.2 \\ 6 < 8 \end{array}\right\}$$ Si multiplicamos por un número positivo a ambos términos, la desigualdad se mantiene.

$$\left.\begin{array}{l} 3 < 4 \\ 3.(-2) < 4.(-2) \\ -6 > -8 \end{array}\right\}$$ Si multiplicamos por un número negativo a ambos términos, la desigualdad se invierte.

EJEMPLOS RESUELTOS

$$2.\left(\frac{1}{4}x - \frac{5}{8}\right) > 6x - 4$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{5}{4} > 6x - 4$$

$$\frac{1}{2}x - 6x > \frac{5}{4} - 4$$

$$-\frac{11}{2}x > -\frac{11}{4}$$

$$x < \frac{-\frac{11}{4}}{-\frac{11}{2}}$$

$$x < \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, el intervalo solución es $S = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ *y la representación gráfica es*

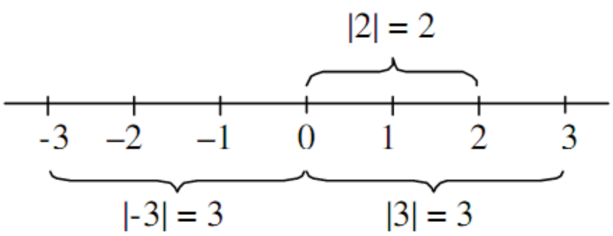
VALOR ABSOLUTO O MÓDULO DE UN NÚMERO REAL

Como estamos operando con números reales que se representan en la recta real, para trabajar con el concepto físico de distancia entre dos números, reconociendo que tal magnitud no puede ser un número negativo, se utiliza la herramienta denominada módulo o valor absoluto.

En matemática a la distancia desde un número hasta cero la llamamos módulo o valor absoluto de ese número.

EJEMPLO

Para representar la distancia entre el origen y el número 2 se simboliza | 2 | como y la distancia entre el número - 3 y el origen se simboliza como | -3 | y como las distancias son positivas entonces | -3 | = 3.



Como el módulo de un número es una distancia, nunca puede ser negativo. Si a ese número lo llamamos x, esto lo escribimos así: $|x| \geq 0$

Formalizando conceptos: el valor absoluto de un número x, se escribe como: | x | y se define

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Lo que significa que el módulo o valor absoluto de x es:
El mismo valor x, si x es positiva o cero.

Ejemplo: | 3 | = 3

El opuesto del valor de x, si x es menor que cero.

Ejemplo: | -3 | = 3

El módulo o valor absoluto de x será un valor siempre positivo

Distancia entre dos números

La distancia entre dos números reales a y b es el valor absoluto de la diferencia entre a y b. Simbólicamente: | a - b | = | b - a |

La distancia entre 5 y -3 es: | 5- (-3) | = |-3 -5 | = 8

Propiedades del valor absoluto

1) Si $x \neq 0 \quad \Rightarrow |x| > 0$.

2) El módulo de un número real es igual al módulo de su opuesto: $|x| = |-x|$

3) El módulo del producto de dos números reales es igual al producto de los módulos de esos números: $|x.y| = |x|.|y|$.

4) El módulo del cociente de dos números reales es igual al cociente de los módulos de esos números. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ *con* $y \neq 0$.

5) El módulo de la suma de dos números es menor o igual que la suma de los módulos: $|x+y| \leq |x| + |y|$

$$\begin{aligned} |5+3| &= |5| + |3| \\ |8| &= |5| + |3| \\ |8| &= 5 + 3 \\ 8 &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |5+(-3)| &\leq |5| + |-3| \\ |2| &< |5| + |-3| \\ |2| &< 5 + 3 \\ 2 &< 8 \end{aligned}$$

6) El módulo de la diferencia es mayor o igual que la diferencia de los módulos: $|x-y| \geq |x| - |y|$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} |7-4| &= |7| - |4| \\ |3| &= |7| - |4| \\ |3| &= 7-4 \\ 3 &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |7-(-4)| &> |7| - |-4| \\ |11| &> |7| - |-4| \\ |11| &> 7 - 4 \\ 11 &> 3 \end{aligned}$$

7) $|x| = \sqrt{x^2}$

ECUACIONES CON MÓDULO

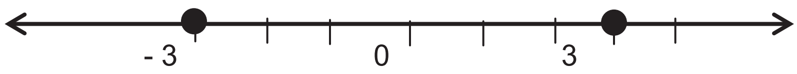
EJEMPLOS RESUELTOS

_Resolver las siguientes ecuaciones con módulos.

EJEMPLO 1

$| 3 | = 3$

El módulo o valor absoluto de 3 se interpreta como los números que están a una distancia de 3 unidades al origen. Por lo tanto gráficamente, se observa que los números 3 o – 3 son los números que verifican lo pedido.



Es decir, $x = -3$ ó $x = 3$
La solución se escribe como un conjunto formado por dos números:
$S = .\{ -3,3\}$

EJEMPLO 2

$| x - 1 | = 2$

a) Podría ser que el valor que está dentro de las barras de módulo fuera positivo:
(x - 1) = 2 luego, despejando x nos daría x= 3

b) Podría ser que el valor que está dentro de las barras de módulo fuera negativo:
(x - 1) = -2 luego despejando x no daría x = -1

$S = .\{ -3,-1\}$ Puedes verificarlo gráficamente.

ACTIVIDADES INECUACIONES Y VALOR ABSOLUTO

1) Dar como intervalo el conjunto solución de cada inecuación en R y representar gráficamente:

a) $-3 < x \le 1$

b) $x \le \frac{5}{2}$

c) $3x > 6$

d) $-3x > 6$

e) $3 + x \ge 6$

f) $\frac{-4+x}{2} \le -1$

g) $-4 + \frac{x}{2} \le -1$

h) $2x - 4 > 6x$

i) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} > 5$

j) $2 < 2x - 4 \le 6$

k) $-3 < -9 - 4x \le 11$

l) $-1 \le \frac{5-2x}{-2} < 1$

2) Hallar, si es posible, los valores de x que cumplen:

a) $|x| = 8$

b) $|x| = \sqrt{3}$

c) $|x| + 8 = 0$

d) $|x| = \frac{4}{3}$

3) Encontrar los valores de x para cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $|x-1| = 2$

b) $|2+x| = 0$

c) $|x+3| = 4$

d) $|10-x| = 5$

e) $\left|x - \frac{1}{3}\right| = \frac{2}{3}$

f) $|x - 0,\widehat{3}| = 2,\widehat{3}$

4) Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $|6-2x| = 4$

b) $|3x+18| = 0$

c) $x^2 = 100$

d) $(x-3)^2 = 4$

e) $3x^2 = x^2 + 18$

f) $x^2 - 37 = -1$

g) $-|x| = -|-9| - |-1,5|$

h) $|x| = |7| - |-2|$

i) $|-3x| = 18$

j) $|x-1| = |-4|$

k) $|x-1| = |1-4|$

l) $-|x| = -6 + |x|$

INECUACIONES CON MÓDULO

Recordando que el valor absoluto o módulo de un número real se utiliza para representar la distancia entre números, podemos interpretar las inecuaciones con módulo de las siguientes maneras:

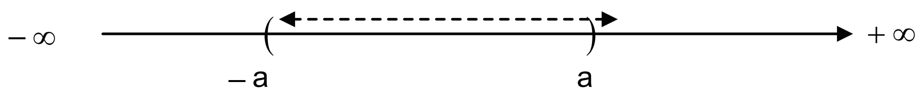
$|x| < 3 \longrightarrow$ La distancia entre un número cualquiera y el origen es menor a 3 unidades.

$|x-2| \ge 3 \longrightarrow$ La distancia entre un número cualquiera y el número 2 es mayor o igual a 3 unidades.

Por lo tanto, teniendo siempre en consideración que el módulo representa distancias, se analiza los casos posibles y sus resoluciones de la siguiente manera:

$|x| < a \Leftrightarrow x < a \wedge x > -a$.

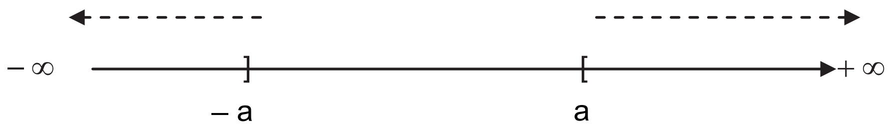
Gráficamente:



En cambio, si

$|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \vee x \leq -a$

Gráficamente:



Teniendo en cuenta la interpretación física de las inecuaciones con módulo, se plantean las mismas como ecuaciones y se resuelven como antes.

El símbolo $\wedge$, significa intersección de ambas condiciones. Ejemplo → Los números que verifican $x < 3 \wedge x \geq -1$ son todos los que pertenecen al intervalo: $[-1:3)$

El símbolo $\vee$, significa unión de ambas condiciones. Ejemplo → Los números que verifican $x \geq 3 \vee x < -1$ son todos los que pertenecen al intervalo: $(-\infty;-1) \cup [3;+\infty)$

EJEMPLOS RESUELTOS

EJEMPLO 1

Resolver la inecuación , significa encontrar los números que se encuentran a una distancia del número – 1, menor o igual a 4 unidades. Realizar una gráfica para encontrar la solución es altamente recomendable pero en casos más complicados algebraicamente se realiza en forma analítica teniendo en cuenta lo explicado antes.

Solución analítica:

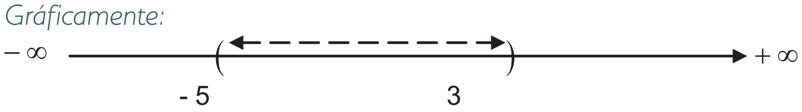
$$|x+1| \le 4 \Leftrightarrow x+1 \le 4 \wedge x+1 \ge -4$$

$$x \le 4-1$$
$$x \le 3 \Rightarrow S_1 = (-\infty;3]$$

$$x \ge -4-1$$
$$x \ge -5 \Rightarrow S_2 = [-5;+\infty)$$

$$S_T = S_1 \cap S_2 = (-\infty;3] \cap [-5;\infty) = [-5;3]$$

Gráficamente:



EJEMPLO 2

Resolver la inecuación $|x+1| \ge 4$ *, significa encontrar los números que se encuentran a una distancia del número -1, mayor o igual a 4 unidades.*

Solución analítica:

$$|x+1| \ge 4 \Leftrightarrow x+1 \ge 4 \vee x+1 \le -4$$

$$x \ge 4-1$$
$$x \ge 3 \Rightarrow S_1 = [3;+\infty)$$

$$x \le -4-1$$
$$x \le -5 \Rightarrow S \;\; = \; -\infty;-5$$

$$S_T = S_1 \cup S_2 = (-\infty;-5] \cup [3;+\infty)$$

Gráficamente:

ACTIVIDADES INECUACIONES CON MÓDULO

1) Resolver las siguientes inecuaciones, expresar la solución mediante intervalos y graficar:

a) $|x-2| \leq 5$

b) $|x-1| > 3$

c) $|x+2| \leq |-3 \cdot 4|$

d) $2|x-9| \geq |x-9|$

e) $|x+5| \geq 2$

f) $|x+4| < 1$

g) $|(-1)(x+5)| > 9 - |-2|$

h) $3|x+2| - 1 < 2|x+2|$

2) Hallar los valores de x tales que $|x-1| < 3 \wedge |x+1| \geq 2$

3) ¿Hay valores de x que satisfagan las inecuaciones $|x| \leq 1 \wedge |x-2| \geq 3$?

4) Resolver las siguientes inecuaciones y expresar las soluciones mediante intervalos:

a) $\left|(-2)^3\right| \leq |x-1|$

b) $|(-1)(x+2)| > |-1|$

c) $2|x+2| < 2 + |x+2|$

d) $\begin{cases} |x| < 6 \\ |x-3| \geq 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} |x-4| \leq 5 \\ |x-1| \geq 4 \end{cases}$

f) $\begin{cases} |x+2| > 3 \\ |x-2| \leq 5 \end{cases}$

5) Hallar los valores del conjunto A:

a) $A = \{x \in \Re / (x+1)(x-5) < 0\}$

b) $A = \{x \in \Re / x(2x+1) \leq 0\}$

c) $A = \left\{x \in \Re / \ x - \frac{1}{2}\left(3x + \frac{1}{4}\right) \geq 0\right\}$

d) $A = \left\{x \in \Re / (2x+3)\left(x - \frac{5}{4}\right) > 0\right\}$

6) Determinar el conjunto de todos los números reales tales que su distancia a -3 sea menor a 5.

7) Determinar el conjunto de todos los números reales tales que su distancia a 3 sea mayor o igual que 4.

8) Un punto x está 8 unidades distante de -3. ¿A qué distancia está el punto x de 1?

Plantear los siguientes problemas como inecuaciones y resolver:

9) Con 11,2 litros de agua alcanza y sobra para llenar 7 botellas iguales pero no para llenar 8 de esas botellas. Mediante inecuaciones indicar entre qué valores se halla la capacidad de las botellas.

10) El peso máximo que soporta un ascensor es de 225 kg. Un hombre de 72 kg, transporta consigo baúles los cuales pesan cada uno 21,75 kg. ¿Cuántos baúles puede transportar?

11) Expresar en lenguaje matemático el siguiente enunciado: "el cuadrado de un número entero más el triple de su siguiente debe ser menor que el cubo de su siguiente".

12) Un corredor de comercio recibe un salario conformado de la siguiente manera: Sueldo fijo: $600 más 17% de comisión por las ventas realizadas. ¿Cuánto deben sumar sus ventas para que su ingreso sea superior a $1500?

13) En un ascensor se cargan 3 cajas de igual peso más un bulto de 25 Kg. Se sabe que la carga máxima que soporta el ascensor es de 110 Kg. Utilizando una inecuación encontrar el conjunto de valores en Kg. que pueden tener las cajas.

14) En una camioneta se cargan 3 cajas de igual peso y otro bulto de 4 Kg. Plantear una inecuación y hallar entre qué valores puede oscilar el peso de cada caja sabiendo que la carga máxima de la camioneta no supera los 19 kg.

15) En una playa de la costa marplatense alquilan motos acuáticas y cobran $50 más $2 por kilómetro recorrido. En una playa en Miramar cobran sólo $6 por kilómetro recorrido. Utilizando una inecuación encontrar a partir de cuántos kilómetros conviene alquilar en Mar del Plata.

16) En un bar antes de entrar al colegio 10 alumnos desayunan café con leche y medialunas. Una de ellas pagó con un billete de $50 y le dieron vuelto. En otra mesa, 4 personas consumieron lo mismo y quisieron pagar con $10 y no les alcanzó. Mediante inecuaciones encontrar entre qué valores se encuentra el precio del desayuno.

17) La carga máxima que puede transportar un camión es de 3500 Kg. Si se sabe que en cada viaje transporta como mínimo 2800 kg. ¿Cuántos paquetes de 70 Kg. puede transportar en cada viaje?

ACTIVIDADES CON SOFTWARE MATEMÁTICO

1) Resolver la ecuación $2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2} + 3 = \sqrt{10}x$ *utilizando el software Máxima*

Solución: los comandos a ingresar son los siguientes:

```
(%i10) 2·sqrt(2)·x-2·sqrt(2)+3=sqrt(10)·x;
```
(%o10) $2^{3/2}x-2^{3/2}+3=\sqrt{10}\,x$

```
(%i11) solve([%], [x]);
```
(%o11) $[x=-\frac{2^{3/2}-3}{\sqrt{10}-2^{3/2}}]$

```
(%i12) ratsimp(%);
```
(%o12) $[x=-\frac{2^{3/2}-3}{\sqrt{10}-2^{3/2}}]$

```
(%i13) factor(%);
```
(%o13) $[x=-\frac{2^{3/2}-3}{\sqrt{10}-2^{3/2}}]$

2) Resolver: $(x-2)^2-(3-x)^2=1$

Solución:

```
(%i3) (x-2)^2-(3-x)^2=1;
```
(%o3) $(x-2)^2-(3-x)^2=1$

```
(%i4) solve([%], [x]);
```
(%o4) $[x=3]$

3)Verificar las ecuaciones del ejercicio 3 de la Serie de Actividades N° 1 utilizando el software Maxima.