Ministerio de Educación
Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Rosario

SECRETARÍA ACADÉMICA

ÁREA DE INGRESO

MATEMÁTICA

- Septiembre de 2013 -

✓ Nociones de Trigonometría:

La trigonometría se dedica al estudio de las relaciones que existen entre las medidas de los ángulos y lados de un triángulo.

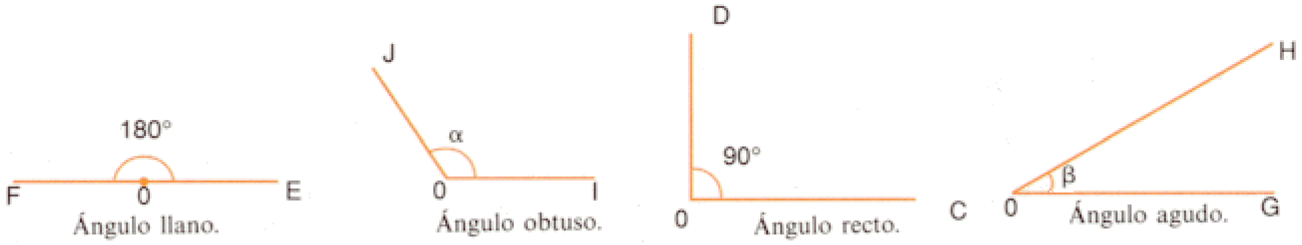
Definimos al ángulo como la porción de plano comprendida entre dos semirrectas que tienen el mismo origen. Ese punto, origen de ambas semirrectas, es el vértice del ángulo; las dos semirrectas son los lados del ángulo.

Cuando las dos semirrectas son perpendiculares, al ángulo se le llama **recto**, y cuando una de ellas es prolongación de la otra, el ángulo es **llano**.

Los ángulos menores que un ángulo recto son ángulos **agudos**, y ángulos mayores que un ángulo recto, pero menores que un ángulo llano son ángulos **obtusos**.

Dos ángulos son complementarios si suman un ángulo **recto**.

Dos ángulos son suplementarios si suman un ángulo **llano**.



Podemos medir ángulos en:

- Grados sexagesimales
- Radianes

En el sistema **sexagesimal**, un ángulo recto mide 90 grados, un grado equivale a sesenta minutos y un minuto a sesenta segundos.

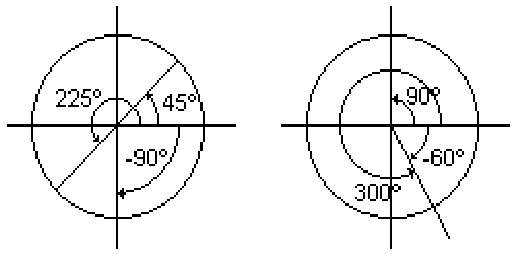
En dicho sistema:

360º es el ángulo determinado por una vuelta completa

180º es la mitad del ángulo de una vuelta

90º es 1/4 del ángulo de una vuelta

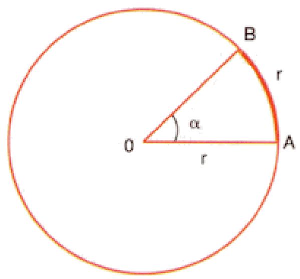
1º es 1/360 del ángulo de una vuelta



En el sistema radial (ó circular) se utiliza la longitud del arco como medida del ángulo. La unidad de medida se denomina radián.

Un **radián** es la medida de un ángulo central que abarca un arco cuya longitud es igual a la longitud del radio de la circunferencia considerada.

El sistema radial es muy utilizado en física ya que es mucho más práctico y directo que trabajar con grados.



Ángulo de 1 radián

La magnitud de un ángulo medido en radianes está dada por la longitud del arco de circunferencia que subtiende, dividido por el valor del radio. El valor de este ángulo es independiente del valor del radio; por ejemplo, al dividir un disco en **n** sectores iguales, el ángulo de cada n-ésimo sector circular es el mismo para cada sector, independiente del radio del disco.

De esta forma, se puede calcular fácilmente la longitud de un arco de circunferencia; solo basta multiplicar el radio por el ángulo en radianes.

Long. arco de circunferencia = [Ángulo en radianes] x [Radio de la circunferencia]

Ya que conocemos el perímetro de una circunferencia de radio unitario (2π r = 2π), entonces el ángulo de una vuelta completa, medido en radianes es 2π. Como además sabemos que este mismo ángulo, medido en grados mide 360º, entonces podemos establecer la siguiente equivalencia:

2π = 360º

1 radian = 57º 17' 44,8''

A partir de esta igualdad, determinamos que:

Equivalencia entre los ángulos en radianes y grados sexagesimales

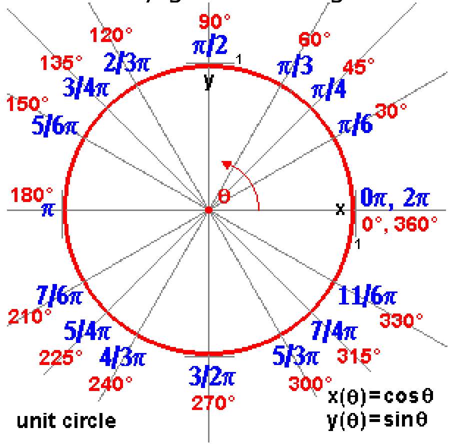


Tabla de equivalencias entre ángulos		
Grados sexagesimales		Radianes
90º	=	$\pi/2$
60º	=	$\pi/3$
45º	=	$\pi/4$
30º	=	$\pi/6$

Ejemplo:

1) Calcula la medida en grados, minutos y segundos de un ángulo de 2 radianes.

Solución

Mediante una regla de tres:

2π *rad* ____________ *360º*

2 rad ____________ *x*

$$x = \frac{2rad.360^{o}}{2\pi rad} \Rightarrow x \cong 114^{o}35'29''$$

Rta.: 2rad $\cong 114^{o}35'29''$

2) Encuentra $\hat{\beta}$ congruente con 2123º tal que 0< $\hat{\beta}$ <360º.

Solución

Dividimos por 360º:

2123º / 360º = 5,897222... vueltas.

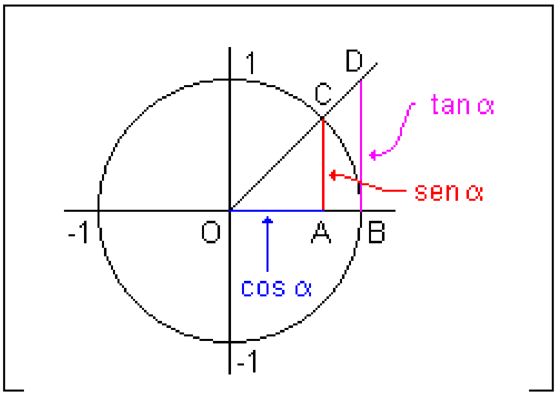
Restando las vueltas completas queda:

0,8972 x 360º = 323º

Rta.: $\hat{\beta} = 323^{o}$

✓ Relaciones fundamentales: SENO, COSENO Y TANGENTE

El triángulo OAC es un triángulo rectángulo y lo usaremos para definir las funciones seno y coseno.



En un triángulo rectángulo, sen α es la razón entre la medida del cateto opuesto al ángulo α y la medida de la hipotenusa, cos α es la razón entre la medida del cateto adyacente al ángulo α y la de la hipotenusa.

En una circunferencia unitaria (con radio igual a uno), la medida de la hipotenusa del triángulo es igual a 1, entonces las relaciones que establecen los valores del seno y coseno de un ángulo son:

$$\text{sen } \alpha = \frac{|AC|}{|OC|} = \frac{|AC|}{1} = |AC|$$

$$\cos \alpha = \frac{|OA|}{|OC|} = \frac{|OA|}{1} = |OA|$$

La relación entre el lado opuesto y el lado adyacente se llama **tangente** del ángulo.

$$\tan \alpha = \frac{|AC|}{|OA|} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos \alpha}$$

Podemos verificar que cualquier triángulo ABC se puede dividir siempre en dos triángulos con un **ángulo recto**, es decir dos triángulos con un ángulo igual a 90°.

La suma de los tres ángulos interiores de un triángulo es 180º, por consiguiente en un triángulo con un ángulo recto y con ángulos agudos $\hat{A}$ y $\hat{B}$

$$\hat{A} + \hat{B} + 90° = 180°$$

Restando 90° en ambos miembros se obtiene:

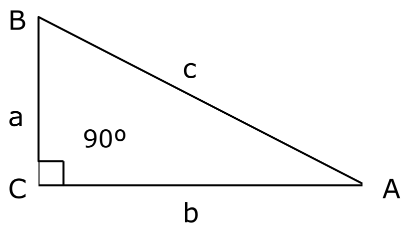
$$\hat{A} + \hat{B} = 90°$$

De esta manera, dado el valor de un ángulo $\hat{A}$ en un triángulo rectángulo, el otro ángulo agudo $\hat{B}$ es igual a 90° - $\hat{A}$.

Llamando ***a, b, c*** a los lados de un triángulo, y correspondiéndose cada uno de ellos con el nombre del ángulo opuesto a él, entonces:

$$\text{sen } \hat{A} = \frac{a}{c}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{b}{c}$$



Para cualquier ángulo $\hat{A}$

$$(sen\hat{A}')^2 + (\cos\hat{A}')^2 = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2}$$

El Teorema de Pitágoras en este triángulo rectángulo puede ser expresado como:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Entonces, aplicando Pitágoras y operando:

$$(sen\hat{A}')^2 + (\cos\hat{A}')^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2}$$

$$(sen\hat{A}')^2 + (\cos\hat{A}')^2 = \frac{c^2}{c^2}$$

$$(sen\hat{A}')^2 + (\cos\hat{A}')^2 = 1$$

Observación importante:

$(sen\hat{A}')^2 + (\cos\hat{A}')^2 = 1$, por lo que tanto *sen* $\hat{A}$ como *cos* $\hat{A}$ deberán ser números en valor absoluto menores ó iguales que 1, es decir:

$$|sen\hat{A}| \leq 1 \text{ y } |\cos\hat{A}| \leq 1$$

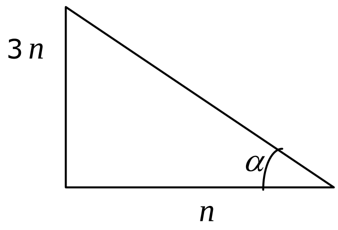
La medida de cada cateto es siempre menor que la medida de la hipotenusa.

Seno, coseno y tangente de algunos ángulos notables

ángulo grados	0	30	45	60	90	120	135	180	270	360 ≡ 0
ángulo radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	$2\pi \equiv 0$
sen(a)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	-1	0
cos(a)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	- 1	0	1
tan(a)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	$-\sqrt{3}$	-1	0	$\nexists$	0

Ejemplo:

3) Dado el siguiente triángulo rectángulo calcula seno, coseno y tangente del ángulo α en la siguiente figura:



Solución

Calculando la longitud de la hipotenusa mediante el Teorema de Pitágoras:

$$\mathrm{h}^2 = n^2 + (3n)^2 \Rightarrow \mathrm{h}^2 = n^2 + 9n^2 = 10n^2 = \sqrt{10n^2} \Rightarrow \mathrm{h} = \sqrt{10}\sqrt{n^2} = \sqrt{10}n$$

$$\mathrm{sen}\alpha = \frac{3n}{\sqrt{10}n} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

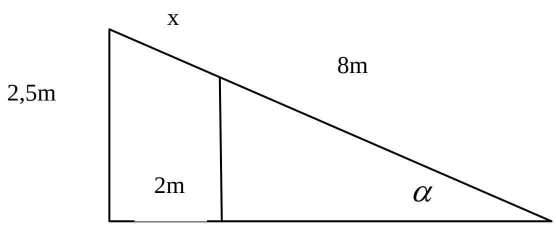
$$\cos\alpha = \frac{n}{\sqrt{10}n} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{3n}{n} = 3$$

Verifica que sen² α + cos² α =1 y que $\dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}$ = $tg\alpha$

Obs: *como **h** representa la medida de la hipotenusa, tomamos* $+\sqrt{10}\ n$

4) Un plano inclinado tiene una longitud de 8m. Desde la base la altura máxima es de 2m. Si se desea que la altura máxima sea de 2,5m. ¿Cuántos metros hay que alargar el plano inclinado sin cambiar el ángulo de inclinación?



Solución

Para este triángulo, $sen\alpha = \dfrac{2m}{8m} = \dfrac{1}{4}$

Al extender el plano, $sen\alpha = \dfrac{2{,}5m}{8m+x} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow 4 \times 2{,}5m = 8m + x = 10m \Rightarrow x = 10m - 8m = 2m$

Rta.: Hay que alargar el plano inclinado sin cambiar el ángulo del plano en 2m.

✓ Resolución de todo tipo de triángulos

Para resolver cualquier tipo de triángulos, según los datos que dispongas, puedes utilizar:

a) Teorema del seno.

b) Teorema del coseno.

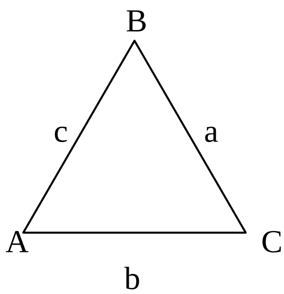


fig.1

a) Teorema del seno:

En todo triángulo las longitudes de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos, es decir:

$$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}}$$

Ejemplo:

5) En el triángulo ABC (fig.1) se tiene: $\hat{A} = 45^o, \hat{B} = 30^o$ y a =40cm, obtener los demás elementos.

Solución

$\hat{C}$ = 180° - (45° + 30°) = 105°

$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}}$, por lo tanto: $b = \frac{a \times sen\hat{B}}{sen\hat{A}}$ y $c = \frac{a \times sen\hat{C}}{sen\hat{A}}$

Operando:

$$b = \frac{a \times sen\hat{B}}{sen\hat{A}} = \frac{40cm \times sen30^{o}}{sen45^{o}} = \frac{40cm \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{20cm}{\sqrt{2}} \times 2 = \frac{20cm \times 2}{2} \times \sqrt{2} = 20\sqrt{2}cm \cong 28{,}28cm$$

$$c = \frac{40cm \times sen105^{o}}{sen45^{o}} \cong 54{,}64cm$$

Rta.: $\hat{C}$ = 105°, b = 28,28cm y c =54,64cm

b) Teorema del coseno:

En todo triángulo el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble producto de ellos por el coseno del ángulo que determinan.

Es decir:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

Ejemplo:

6) Calcular el perímetro del triángulo ABC (fig1) siendo: a = 10cm , c = 12 cm y $\hat{B}$ = 60°

Solución

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$

$b^2 = 100cm^2 + 144cm^2 - 2.10cm.12cm.\cos 60^{o}$

b = 11,14cm

perímetro = a+b+c= 10cm + 12cm + 11.14 cm = 33,14cm

Rta. El perímetro es 33,14cm

✓ Ejercitación propuesta

1) Expresa los siguientes ángulos en radianes:

a) 90º b) 45° c) 30º d) 75º

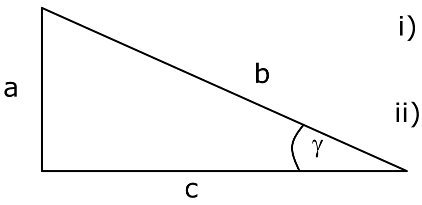
e) 150º f) 2 giros g) 300º h) 120°

2) Pasa los siguientes ángulos al sistema sexagesimal:

a) π b) $\pi/2$ c) $\pi/4$

d) $3\pi/4$ e) $7\pi/36$ f) $\pi/12$

3) Resuelve los siguientes triángulos rectángulos:



i) $a = 27{,}6$ m
$\gamma = 40° \, 57' \, 24''$

ii) $a = 42{,}18$ m
$c = 33{,}40$ m

iii) $b = 75$ cm
$\gamma = 30° \, 19' \, 47''$

iv) $b = 4{,}20$ cm
$c = 17{,}15$ cm

4) En un triángulo ABC, dos de sus lados (a y b) miden respectivamente 4 m y 5 m. Además el ángulo que forman a y b es de 30º. Se pide:

a) La medida, en el sistema radial, del ángulo que forman a y b.
b) ¿Se puede elegir la medida del tercer lado, o ya está definida?
c) ¿Cuánto debería medir b para que el triángulo resulte rectángulo?
d) La superficie del triángulo en este último caso.
e) Un ejemplo de una situación real que te llevaría a realizar el cálculo del punto d).

5) Un poste telegráfico está situado a 3 m de la orilla de un canal. En la margen opuesta se encuentra un observador que dirige una visual horizontal hacia el poste, y luego otra oblicua hacia el extremo superior del mismo, que forman un ángulo de 23º 30´. El observador se aleja del canal 15 m y dirige otra visual, pero ahora con un ángulo de 7º 25´40´´. Calcula la altura del poste y el ancho del canal, sabiendo que la altura del observador es de 1,62 m, y que el poste y las dos posiciones del observador están en una misma perpendicular a las márgenes del canal, según muestra la figura.

6) ¿Cuál es el largo de la sombra de un edificio de 30m cuando el sol está a 20° sobre el horizonte?

7) En un remate se venden dos terrenos. El primero en forma de rectángulo de 10 m de frente por 35,5 m de fondo, se vendió en $ 14.200.-, y por el segundo, de forma de rombo cuya diagonal mayor es el doble de la diagonal menor que mide 14 m, se obtuvo $ 12950.-

a) ¿Por cuál de los dos se obtuvo el mejor promedio por m^2?

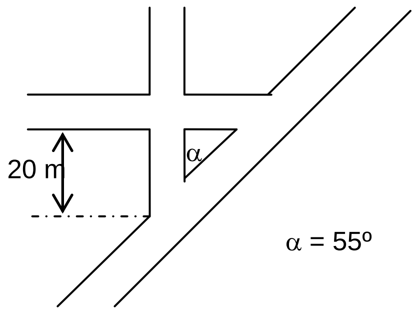
b) ¿Cuál es el perímetro del segundo terreno?

8) La base mayor de un trapecio isósceles mide 14 m. Los lados no paralelos miden 10 m y los ángulos de la base miden 80º.

a) Encuentra la longitud de una diagonal

b) Encuentra el área.

9) En la figura se muestra un cruce de calles, todas ellas de 6 m de ancho y un área peatonal triangular. Calcula el área de esta zona peatonal.



10) Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son de $\pi/6°$ y la altura es 15m. Obtener la longitud de la base.

11) Halla la componente vertical y horizontal de una fuerza de 10 N que forma un ángulo con la horizontal de 39°.