



*Ministerio de Cultura, Educación, Ciencia y Tecnología
Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Rosario*

SECRETARÍA ACADÉMICA

AREA INGRESO

Matemática

- Mayo de 2006 -

SECRETARÍA ACADÉMICA

AREA INGRESO

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

Facultad Regional Rosario

Zeballos 1341

2000 – Rosario - Argentina

www.frro.utn.edu.ar

e-mail: ingreso@frro.utn.edu.ar

El objetivo de este Curso de Matemática es reafirmar y profundizar los conocimientos adquiridos durante el nivel de enseñanza del polimodal. Se pretende generar un ámbito de información y de formación en el que el aspirante alcance los conocimientos y habilidades que le permitan el abordaje de las asignaturas del primer nivel de la carrera.

Elaboración del Material

Ing. Raquel Voget

EL NÚMERO REAL

<i>Mensaje al alumno</i>	5
<i>Lenguaje simbólico y lenguaje usual (coloquial o común)</i>	6
Ejercitación	9
<i>Conjuntos numéricos</i>	9
Propuesta de revisión	10
Ejercitación propuesta	12
Notación científica	14
<i>Representación de los números reales en la recta numérica</i>	14
<i>Orden en R</i>	15
Propiedades	15
Revisión	15
<i>Intervalos</i>	16
<i>Inecuaciones</i>	17
Ejemplos	17
Ejercitación	19
<i>Valor absoluto de un número real</i>	20
Ejemplos	20
Propiedades	20
Ejemplo	21
Ejercitación	21
<i>Distancia en R</i>	22
Propiedades	22
Revisión	22
Otras propiedades	22

Ejercitación.....	23
<i>Respuestas a la ejercitación propuesta.....</i>	<i>24</i>
Conjuntos numéricos	24
Inecuaciones.....	24
Valor absoluto	25
Distancia en R	25
<i>MISCELANEA PARA AUTOEVALUACION</i>	<i>26</i>



Mensaje al alumno

Este material está preparado de modo que aprendas a *enfrentar problemas*.

Se espera que seas *activo*, no pasivo – repetidor de información. Que cultives tu perfil de *observador, hacedor, verificador, defensor de tu propio criterio*.

Se espera, además, que solicites *la ayuda que realmente necesitas*.

Por último, que *el saber adquiera valor por sí mismo, y por su relación con una futura actividad*, y no solamente como un medio para la superación de la evaluación.

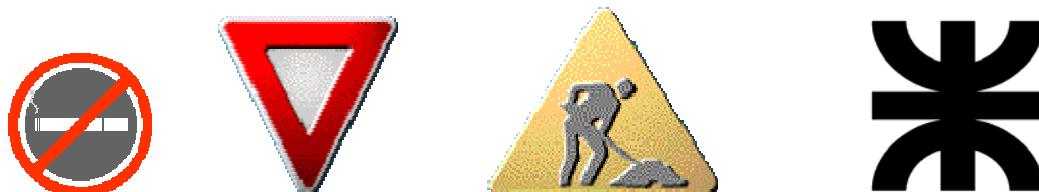
Bienvenido. Tu suerte seguramente vendrá de la mano de tu esfuerzo.

Comencemos...



Lenguaje simbólico y lenguaje usual (coloquial o común)

No es necesario utilizar lenguaje coloquial, escrito u oral, para que interpretes rápidamente los siguientes signos:



El primero significa “en este lugar está prohibido fumar”, el segundo “debe ceder el paso”, el tercero “circule con cautela, con precaución, en esta zona hay hombres trabajando”, y el último es el logo de nuestra querida **Universidad Tecnológica Nacional**.

Este lenguaje es el llamado *lenguaje simbólico*.

En Matemática, el lenguaje simbólico nos permite ahorrar tiempo de escritura, y de lectura e interpretación.

En esta primera clase ejercitaremos el manejo del lenguaje simbólico. Te será de utilidad no sólo para comprender los signos que utilizarán los docentes, sino también para abordar la bibliografía que te indiquen. Te recomendamos que cada vez que inicies la lectura de un libro, lo hagas por la “Tabla de símbolos o Notación”, que utiliza el autor.

Algunos símbolos como $+$, $-$, $=$, tienen tradicionalmente un significado establecido, pero por ejemplo las letras del alfabeto griego se emplean con sentidos diferentes. Por ello la elección de la notación debe hacerse **cuidadosamente**.

No podemos designar a dos objetos diferentes con un mismo símbolo. Si “ h ” es la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, no llamaremos “ h ” a la medida de la altura.

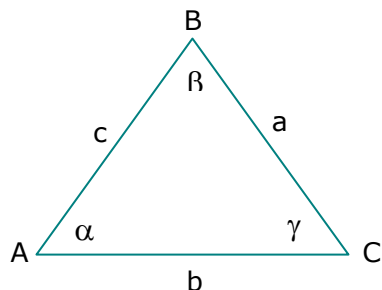
Para expresar un producto entre reales, podemos utilizar distintos signos como: $a \times b$, $a \cdot b$ o simplemente $a b$. No obstante en el curso de Álgebra y Geometría Analítica, cuando operes con vectores, verás que cada uno de esos signos se utiliza para una operación diferente.

Muchas veces la relación de los signos sugiere la relación de los objetos, por ello generalmente utilizaremos letras del principio del alfabeto (a , b , c , ...) para las cantidades dadas o constantes, y letras del final (... , w , x , y , z) para cantidades desconocidas o variables.

Otro detalle a tener en cuenta es que para designar objetos de una misma categoría elegimos letras de un mismo alfabeto. Por ejemplo: mayúsculas latinas para puntos (A , B , C , ...) como



ser los vértices de una figura, minúsculas latinas para lados ($a, b, c, \dots$) y minúsculas griegas para ángulos ($\alpha, \beta, \delta, \gamma, \dots$). Por otro lado en un triángulo *generalmente* tomamos **a** como el lado opuesto al vértice **A**, y como α el ángulo de vértice A.



Para que los símbolos que utilizamos sean fáciles de recordar y de interpretar, muchas veces empleamos *iniciales*. Por ejemplo: "V" para volumen, "t" para tiempo, "d" para distancia, "r" para radio, etc. El problema lo tendremos, en este caso, si se repiten las iniciales, como es el caso de tiempo y temperatura.

Ahora bien: ¿por qué para altura se utiliza "h"?

Repasemos ahora algunos **símbolos** que seguramente ya has visto, y **cuyo manejo te será de utilidad** en diferentes cursos con el objeto de sintetizar, pero **CUIDADO que ello, como ya se trató en párrafos anteriores, conlleva precisión en el uso:**

$\in$	Pertenece ó pertenecen	$\vee$	o
$\notin$	No pertenece(n)	$\Rightarrow$	Implica(n)
$\subset$	Contenido	$\Leftrightarrow$	Si y sólo sí
$\not\subset$	No contenido	$\exists$	Existe(n)
$\supset$	Contiene	$\forall$	Para todo
$\cup$	Unión	$\leq$	Menor o igual
$\cap$	Intersección	$\geq$	Mayor o igual
$/$	Tal(es) que	$\neq$	Distinto
$\approx$	Aproximado(s)	$\emptyset$ ó $\{\}$	Conjunto vacío
$\wedge$	y	$\therefore$	Por lo tanto



Algunos ejemplos de cómo expresar en lenguaje simbólico algunas proposiciones:

- Si el cuadrado de un número es par, entonces dicho número es par, se escribe:

$$\underbrace{\quad}_{n^2 \text{ par}} \Rightarrow \underbrace{\quad}_{n \text{ par}}$$

- Si un número es par, entonces su cuadrado es par, se escribe:

$$\underbrace{\quad}_{n \text{ par}} \Rightarrow \underbrace{\quad}_{n^2 \text{ par}}$$

- Si demostramos que ambas proposiciones son verdaderas, podremos escribir:

$$\underbrace{\quad}_{n \text{ par}} \Leftrightarrow \underbrace{\quad}_{n^2 \text{ par}}$$

un número es par si y sólo si su cuadrado es par

- Existe un número real "y" mayor que 2, se escribe:

$$\exists y \in \mathbb{R} / y > 2$$

- Para cada número real "x" existe un número real "y" mayor que él, se escribe:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} / y > x$$

Nota que los cuantificadores $\exists$ y $\forall$ tienen distinto peso. Cuando se indica existe ($\exists$), ello quiere expresar: *existe al menos uno*. En cambio cuando refiere "para todo" o "para cada" ($\forall$), la propuesta es para cualquier elemento del conjunto dado (en este caso cualquier número real) que se nos ocurra considerar.

- El cuádruplo del inverso multiplicativo de un número, se escribe:

$$\frac{4}{x}$$

- Un número tal que el cuádruplo de su inverso multiplicativo es 8, se escribe:

$$x \in \mathbb{R} / \frac{4}{x} = 8$$

A $\frac{4}{x}$ la llamamos **una expresión**. Esta expresión tendrá un valor numérico según el valor que le asignemos a **x**. Cuando a la expresión $\frac{4}{x}$ le imponemos la **condición** de ser igual a 8, queda planteada la **ecuación** $\frac{4}{x} = 8$.

La suma de las edades desconocidas de padre e hijo se puede expresar como $x + y$, siempre que sepamos qué representamos con "x" y qué representamos con "y". Si la suma de las edades es 80, queda planteada la ecuación $x + y = 80$.



Como advertirás, el planteo de la ecuación aparece como una traducción del lenguaje común al lenguaje de los signos matemáticos. Un lenguaje perfectamente adaptado a su propósito, conciso y preciso, con reglas que no sufren excepciones.

- Responde ahora estas dos preguntas:

¿Tiene sentido la expresión $\frac{4}{x}$ para $x = 0$?

¿ $\exists x \in \mathbb{R} / \frac{4}{x} = 8$?

Ejercitación

(No olvides: consulta ante cualquier duda)

- Escribe en lenguaje simbólico:
 - a) Existe un número real x que elevado al cuadrado da 2.
 - b) Todo número divisible por 6 es divisible por 2.
 - c) Propiedades básicas relativas a la suma y producto en $\mathbb{R}$.
- Escribe en lenguaje usual:
 - i) $a < b \Rightarrow b - a > 0$
 - ii) $\exists y \in \mathbb{R} / y^2 < -2$
 - iii) $\forall x \in \mathbb{R}, x^0 = 1$

Nota que:

Estas tres proposiciones tienen valor de verdad (pueden ser verdaderas o falsas).

Determina cuál o cuales son verdaderas, justificando tu respuesta.

Observación:

Para mostrar que una propuesta es falsa, puedes utilizar un ejemplo particular que la contradiga. Para determinar que una propuesta es verdadera no puedes valerte de un ejemplo particular, sino de definiciones y/o propiedades que te autoricen a tal aseveración.

Conjuntos numéricos

El término “conjunto” así como “elemento” y el concepto de “pertenencia”, son considerados objetos y conceptos primitivos, es decir que no se definen.

Se llama “conjunto vacío” a un conjunto sin elementos.

Se llama “conjunto universal”, al conjunto de todos los elementos que interese considerar en cada caso.



- ¿Recuerdas los distintos conjuntos de números que has utilizado, y su notación?

Completa:

N
{0}
 N_0
 Z^-
Z
Q
I
R

Dados dos conjuntos A y B, se dice que A es subconjunto de B si y sólo si todo elemento de A pertenece a B. En símbolos: $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$

- ¿Es un conjunto A subconjunto de sí mismo?
- ¿Es el conjunto vacío subconjunto de A?

La unión de dos conjuntos es otro conjunto formado por los elementos que pertenecen al menos a uno de ellos. En símbolos: $U = A \cup B = \{x \in U / x \in A \vee x \in B\}$

- Describe $A \cup \emptyset$

La intersección de dos conjuntos es otro conjunto formado por los elementos que pertenecen a ambos. En símbolos: $I = A \cap B = \{x \in I / x \in A \wedge x \in B\}$

- Describe $A \cap \emptyset$
- ¿En qué caso particular la unión entre dos conjuntos no vacíos puede tener los mismos elementos que su intersección?
- ¿Qué relación estableces entre los conjuntos numéricos mencionados anteriormente?
- Analiza cuáles de las propiedades relativas a la suma y producto, citadas en la ejercitación propuesta, verifican la suma y producto en N. **(No dudes si necesitas consultar)**

Propuesta de revisión

¿Recuerdas las propiedades de la potenciación y de la radicación?

TEN SIEMPRE EN CUENTA QUE:

NO ES POSIBLE LA DIVISION POR CERO

NO EXISTE 0^0

NO ES POSIBLE OBTENER RAÍCES DE INDICE PAR DE NUMEROS NEGATIVOS



Como cierre de esta clase, completa la siguiente tabla y luego la presentas para su corrección:

	En lenguaje coloquial (o usual) Completa	Analiza cuidadosamente
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$		$\forall a, m, n \in \mathbb{Z}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$		$\forall a \neq 0, m, n \in \mathbb{Z}$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$		$\forall a, m, n \in \mathbb{Z}$
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$		$\forall a, \forall b, n \in \mathbb{Z}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$		$\forall a, \forall b \neq 0, n \in \mathbb{Z}$
$a^n = \frac{1}{a^{-n}}$		$\forall a \neq 0, n \in \mathbb{Z}$
$(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a$		$a \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}$ Si $a \in \mathbb{R}^-, n$ impar
$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$		$a, b \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}$, Si a ó $b \in \mathbb{R}^-, n$ impar
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$		$b \neq 0$ $a, b \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}$, Si $a, b \in \mathbb{R}^-, n$ impar
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$		$m \in \mathbb{Z}$ $a \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}$ Si $a \in \mathbb{R}^-, n$ impar
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$		¿Te animas a completar?

En www.acertijos.net, podrás encontrar curiosidades que te ayudarán a no cometer errores.

Como estas:

¿ Puede ser $4 = 5$?

$$16 - 36 = 25 - 45$$

$$16 - 36 + (20 + \frac{1}{4}) = 25 - 45 + (20 + \frac{1}{4})$$

$$16 - 36 + 81/4 = 25 - 45 + 81/4$$

$$16 - 36 + (9/2)^2 = 25 - 45 + (9/2)^2$$



$$4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 9/2 + (9/2)^2 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 9/2 + (9/2)^2$$

$$(4 - 9/2)^2 = (5 - 9/2)^2$$

$$4 - 9/2 = 5 - 9/2$$

Por lo cual:

$$4 = 5$$

¿ Dónde está el error ?

$$\text{Si } a \in \mathbb{R}$$

$$a = a$$

$$a^2 = a^2$$

$$a^2 - a^2 = a^2 - a^2$$

$$(a - a) (a + a) = a (a - a)$$

$$a + a = a$$

$$a = a - a$$

$$a = 0$$

¿ Todo número real es cero?

Si no descubriste los errores, y aún si los descubriste, no vendrá mal que ejercites en la próxima clase, las propiedades de los números reales.

Si ya repasaste las propiedades válidas para las operaciones en $\mathbb{R}$, según lo indicado en la primera clase, ahora puedes enfrentarte a algunos ejercicios. Espero que disfrutes de esta actividad. Pon a prueba tu concentración y esfuerzo.

Como en esta primera oportunidad te enfrentarás a operaciones rutinarias, espero que no pierdas el interés. Es un paso necesario que tienes que dar para prepararte a resolver problemas.

Ejercitación propuesta

A) Se dice que un conjunto de números tiene un “orden denso” si entre dos de sus elementos hay un número que también pertenece al conjunto. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos tienen un orden denso?

1) $\mathbb{N}$, 2) $\mathbb{Z}$, 3) $\dot{\mathbb{Z}}$ (múltiplos de 2), 4) $\mathbb{Q}$, 5) $\mathbb{R}$

B) Calcula o resuelve en cada caso, según corresponda, para que puedas continuar, o busques superar las dificultades que encuentres. **(Puedes entregarnos la resolución para su corrección).**



No olvides mencionar, en cada caso, las propiedades utilizadas.

1) $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right) \div \frac{1}{3} - \left(2 \cdot \frac{1}{10} + \frac{2}{5}\right) \cdot 10$ (opera con números decimales)

2) $\frac{\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) \cdot \left[\left(-\frac{1}{6}\right) \div \frac{2}{3}\right]}{-\left(2\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)} \cdot \left(-\frac{1}{5} + \frac{8}{10} - \frac{9}{15}\right) =$ (opera con números fraccionarios)

3) Encuentra x/

$$\frac{x}{3,333\ldots} = \frac{\sqrt[3]{1 - \frac{37}{64}}}{(0,5 - 1)^{-2} \cdot \frac{1}{92} \cdot 1,022\ldots \cdot 2,5^2}$$

4) Da el opuesto y el inverso multiplicativo, si existen, del resultado del ejercicio 2.

5) ¿Para qué valor/es de **x** carece de sentido cada una de las expresiones?

a) $\frac{4}{x}$

b) $\frac{3x - 1}{x + 2}$

c) $\frac{2x + 6}{x^2 - 9}$

6) Simplifica:

$$\left(\frac{3^4 \cdot a^{\frac{5}{2}} \cdot b^{-10} \cdot 3^8}{3^5 \cdot 3^2 \cdot 3^7}\right)^{-\frac{1}{5}}$$

7) Extrae factores del radical:

$$\sqrt[3]{-81 x^9 y^{-12}}$$

8) Racionaliza:

a) $\frac{18}{\sqrt[3]{5}}$



b) $\frac{5-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$

9) Resuelve:

a) $\frac{x}{2} + \frac{3}{4}x = 15 + \frac{5x}{6}$

b) $\sqrt{3}x^2 + 6x + 3\sqrt{3} = 0$

c) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$ Sugerencia: reemplaza x^2 por t

10) Traduce al lenguaje algebraico el siguiente enunciado:

La suma de las edades de padre e hijo es de 78 años, y su producto es 1296.

¿Puedes obtener la edad de cada uno?

Notación científica

La *notación científica* para un número es su escritura en la forma **a. 10ⁿ** donde $1 \leq a < 10$, y $n \in \mathbb{Z}$. Como observarás, esta notación te será de utilidad cuando realices cálculos con números muy grandes o muy pequeños. Por ejemplo:

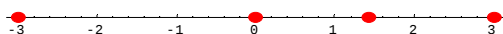
- i) La longitud de onda de cierta luz roja es 0,000066 cm. Este número en notación científica es $6,6 \cdot 10^{-5}$.
- ii) La notación estándar de $8 \cdot 10^6$ es 8.000.000

Ahora:

Encuentra la notación estándar de un número cuya notación científica es $a \cdot 10^n$, donde a es un número primo impar que es factor de 144 y n es el mayor múltiplo de 6 menor que 15.

Representación de los números reales en la recta numérica

Representemos en la recta numérica: -3 , 0 , $\sqrt{2}$ y 3



Representa los números: 2 , $1 + \sqrt{2}$, $3/2$ y sus opuestos.

- ¿Cuál es la distancia de cada punto representativo al origen de coordenadas?
- ¿Cuántos números se encuentran a una misma distancia del origen de coordenadas?
- Representa ahora al natural siguiente a 2.
- ¿Puedes representar al racional siguiente a $3/2$?
- ¿Cómo lo explicas?



Orden en R

El conjunto R es un “conjunto ordenado”, según la relación “es menor que” ($<$).

$a < b$: “el número a es menor que el número b ”, o bien, a está a la izquierda de b en la recta numérica.

Significa lo mismo decir “ b es mayor que a ” ó “ b está a la derecha de a ”.

¿Qué significa $a \leq b$?

¿Y $a \geq b$?

Propiedades

Sean los números reales x, y, z y t , prueba geoméricamente la validez de las siguientes afirmaciones:

a) $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$

b) $x < y, z > 0 \Leftrightarrow x \cdot z < y \cdot z$

c) $x < y, z < 0 \Leftrightarrow x \cdot z > y \cdot z$

d) $x < y, x > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y} > 0$

e) $x < y, y < 0 \Leftrightarrow 0 > \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$

f) $x < y, y < z \Rightarrow x < z$

g) $x < y, z < t \Rightarrow x + z < y + t$

Supongamos que $x \geq y$ “a la vez que” $x < z$, entonces podemos escribir $y \leq x < z$

¿Podríamos hacerlo en el caso $x \geq 3$ “ó” $x < -2$?

Revisión

i) Representa el conjunto de valores de la variable que satisface:

a) $-2 < x < 2$

b) $x < -2 \vee x > 2$

ii) ¿Son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones?

1) $x \leq y \Rightarrow x = y$

2) $x = y \Rightarrow x \leq y$

3) $x < y \Rightarrow x \leq y$

4) $-x < x, \forall x \in \mathbb{R}$

5) $(x < y, y \geq z) \Rightarrow x < z$

6) $x^2 \geq x, \forall x \in \mathbb{R}$

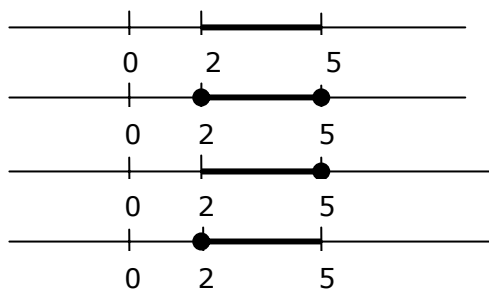


Intervalos

Si consideramos los conjuntos:

$$A = \{x/ x \in \mathbb{R} \wedge 2 < x < 5\}$$
$$B = \{x/ x \in \mathbb{R} \wedge 2 \leq x \leq 5\}$$
$$C = \{x/ x \in \mathbb{R} \wedge 2 < x \leq 5\}$$
$$D = \{x/ x \in \mathbb{R} \wedge 2 \leq x < 5\}$$

su representación en la recta numérica es, en cada caso:



A estos conjuntos se los expresa: $A = (2, 5)$ Intervalo abierto
 $B = [2, 5]$ Intervalo cerrado
 $C = (2, 5]$ Intervalo semiabierto (abierto a izquierda)
 $D = [2, 5)$ Intervalo semiabierto (abierto a derecha)

Representa en la recta numérica los conjuntos:

$$E = \{x/ x \in \mathbb{R} \wedge x > 2\}$$
$$F = \{x/ x \in \mathbb{R} \wedge x \leq 5\}$$

A estos conjuntos se los expresa: $E = (2, +\infty)$

$$F = (-\infty, 5]$$

Completa el siguiente cuadro:

Representación	Intervalo
	$[-1, +\infty)$
	$(-\infty, 2)$



Inecuaciones

Inecuaciones son todas las desigualdades en las cuales aparecen una o más variables (incógnitas de la inecuación).

Todos los valores que puede/n asumir la/s variable/s, para los cuales la desigualdad se satisface, forman el "conjunto solución de la inecuación".

¿Puedes describir el conjunto solución en los siguientes casos?

a) $x^2 \geq 0$

b) $x^2 + 1 < 0$

Dos inecuaciones son equivalentes cuando tienen el mismo conjunto solución.

Resolver las inecuaciones es ir encontrando inecuaciones equivalentes, hasta llegar a una cuya solución sea inmediata.

Ejemplos

Se trata de encontrar x /

i) $3x - 1 \geq 2$

Por propiedad a) $3x - 1 + 1 \geq 2 + 1$, por lo tanto
 $3x \geq 3$

Por propiedad b) $\frac{3x}{3} \geq \frac{3}{3}$ ($3 > 0$) , y resulta

$$x \geq 1$$

Llegamos entonces a concluir que los números reales que satisfacen la condición son los mayores o iguales a 1. ($[1, +\infty)$)

ii) $(3x + 1)(x - 2) \geq 0$

Un producto de dos factores es positivo o cero cuando ambos factores tienen el mismo signo o son cero. Por lo tanto las posibilidades son:

$$\begin{cases} 3x + 1 \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases} \quad \vee \text{ "o bien" } \quad \begin{cases} 3x + 1 \leq 0 \\ x - 2 \leq 0 \end{cases}$$



Analiza ahora qué propiedades nos autorizan a escribir las inecuaciones equivalentes:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq -1/3 \\ x \geq 2 \end{array} \right. \quad \vee \text{ "o bien" } \quad \left\{ \begin{array}{l} x \leq -1/3 \\ x \leq 2 \end{array} \right.$$

(Caso I)

(Caso II)

Inspecciona geométricamente (en la recta numérica), los números reales "x" que en cada caso satisfacen las dos condiciones simultáneamente.

En el caso I pudiste comprobar que son los reales mayores o iguales a 2, y en el caso II son los reales menores o iguales a $(-1/3)$. Analiza ahora en la inecuación, qué ocurre cuando:

- 1) $x = 2$ ó $x = -1/3$,
- 2) $x < -1/3$,
- 3) $x > 2$

El conjunto solución es, entonces:

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x \leq -1/3 \vee x \geq 2\}$$

Otra forma de escribirlo es:

$$S = (-\infty, -1/3] \cup [2, +\infty)$$

$$\text{iii) } \frac{x-1}{x} \leq 2$$

¡Cuidado! Nuestra incógnita podría asumir valores negativos y/o positivos, con lo cual, según el signo, si multiplicamos ambos miembros de la inecuación por "x", la orientación de la desigualdad podría cambiar o no.

El consejo es que no "pases" multiplicando x al segundo miembro, sino:

$$\text{Por propiedad a) } \frac{x-1}{x} - 2 \leq 2 - 2$$

Sacando común denominador y asociando queda:

$$\frac{-x-1}{x} \leq 0$$



Un cociente es negativo o cero cuando numerador y denominador tienen distinto signo, pudiendo el “numerador” ser cero:

$$I \begin{cases} -x - 1 \leq 0 \\ x > 0 \end{cases} \quad \vee \text{ (o bien)} \quad II \begin{cases} -x - 1 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

lo cual equivale a:

$$I \begin{cases} x \geq -1 \\ x > 0 \end{cases} \quad \vee \text{ (o bien)} \quad II \begin{cases} x \leq -1 \\ x < 0 \end{cases}$$
$$S_I = (0, +\infty) \quad S_{II} = (-\infty, -1]$$

$$S = S_I \cup S_{II} = (0, +\infty) \cup (-\infty, -1]$$

Ejercitación

1) ¿Dónde está el error?

Si consideramos la inecuación $8x + 4 < 2x + 1$, sabemos que se verifica para $x < -\frac{1}{2}$.

Ahora bien la inecuación dada es equivalente a $8(x + \frac{1}{2}) < 2(x + \frac{1}{2})$ - ¿por qué? - pero

dividiendo ambos miembros por $(x + \frac{1}{2})$ llegamos a $8 < 2$. ¿?

2) Resuelve cada una de las siguientes inecuaciones, y representa su conjunto solución en la recta numérica.

- a) $3x - 9 > 2$
- b) $(x - 3)(2x + 1) \leq 0$
- c) $\frac{x+3}{x} \geq 4$
- d) $\frac{2}{x} < \frac{7}{3}$
- e) $-3 < 2x + 1 \leq 5$

3) Encuentra todos los conjuntos de tres números enteros positivos impares consecutivos cuya suma sea menor que 22 pero mayor que 10. (No se aceptará que lo resuelvas probando)



Valor absoluto de un número real

En el desarrollo de temas que veremos en el primer nivel, estudiaremos qué ocurre al considerar números reales muy “próximos” lo cual, llevado a la recta, habla de “distancia” entre esos dos puntos.

Definición:

Llamamos valor absoluto de un número real x , y lo indicamos $|x|$, a:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Se lee: el valor absoluto de un número real es:
el mismo número, si ese número es positivo o cero,
o su opuesto, si ese número es negativo.

Ejemplos

- a) $|2| = 2$, ya que $2 \geq 0$
b) $|-5| = -(-5) = 5$, ya que $-5 < 0$

Completa:

c) $|0| =$

d) $|\sqrt{2} - 5| =$

e) $|12 - 2\pi| =$

Representa a), b) y c) en el eje real.

Como observarás, podemos interpretar que $|x|$ es la distancia de “ x ” al origen.

Propiedades

Analiza cuidadosamente cada caso y escribe la propiedad en lenguaje coloquial.

- 1) $|x| \geq 0$
2) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$



$$3) |x| = |-x|$$

$$4) |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$5) \left| \frac{1}{y} \right| = \frac{1}{|y|}, \quad y \neq 0$$

$$6) \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad y \neq 0$$

$$7) -|x| \leq x \leq |x|$$

$$8) |x + y| \leq |x| + |y|$$

Ejemplo

Se trata de hallar x /

$$|x + 2| = |2x - 1|$$

La igualdad será verdadera para x tal que $x + 2$ y $2x - 1$ sean iguales o bien opuestos.

(Recuerda: $|y| = |-y|$)

Entonces:

$$x + 2 = 2x - 1$$

✓
(o bien)

$$x + 2 = -(2x - 1)$$

$$-x = -3$$

✓

$$x + 2 = -2x + 1$$

$$x = 3$$

✓

$$3x = -1$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

Solución: $S = \left\{ -\frac{1}{3}, 3 \right\}$

Nota que el conjunto solución es un conjunto finito. Sus elementos son $-\frac{1}{3}, 3$, únicos valores de x para que la igualdad de partida sea verdadera. Siempre puedes verificar el resultado obtenido, reemplazando en la ecuación dada.

Ejercitación

1) Halla el ó los números reales que verifiquen:

a) $|6x - 9| = 3$

b) $\left| \frac{2}{3}x + 8 \right| = 0$

c) $|2x| = |5x + 2|$



2) Expresa en lenguaje simbólico:

- a) la distancia entre x y el origen es menor que 3.
- b) $(x - 1)$ está a más de 3 u del origen.

3) ¿Cuáles son los elementos del conjunto $A = \{x / x \in \mathbb{Z} \wedge 2 < |x| < 3\}$?

Distancia en $\mathbb{R}$

Dados dos números reales x y x_0 / $x \neq x_0$, las medidas $x - x_0$ y $x_0 - x$ tienen siempre distinto signo, pero el mismo valor absoluto.

La distancia entre x y x_0 es : $d(x, x_0) = |x - x_0|$

La distancia de cualquier punto al origen es, entonces,

$$d(x, 0) = |x - 0| = |x|$$

Propiedades

Interpreta geométricamente las siguientes propiedades:

- 1) $d(x, x_0) \geq 0$
- 2) $d(x, x_0) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$
- 3) $d(x, x_1) \leq d(x, x_0) + d(x_0, x_1)$

Revisión

Si $|x - x_0| = d(x, x_0)$, ¿cómo lees?:

$$|x - 2| = 5,$$

$$|x + 3| = 1,$$

$$\left| x - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{3}{2},$$

$$2 < |x + 1| < 4$$

Otras propiedades

Valiéndonos de la noción de distancia, veamos otras propiedades del valor absoluto, que nos serán de utilidad:

Lee en lenguaje usual la desigualdad

$$|x| < a, a \in \mathbb{R}^+$$



Elige un valor de a , y representa geométricamente.

¿Puedes afirmar entonces que: $(|x| < a, a \in \mathbb{R}^+) \Rightarrow -a < x < a$?

Efectúa ahora lo mismo para $|x| \geq a, a \in \mathbb{R}^+$

¿Puedes afirmar entonces que: $(|x| \geq a, a \in \mathbb{R}^+) \Rightarrow (x < -a \vee x > a)$?

Ejercitación

Resuelve cada una de las siguientes inecuaciones, y representa su conjunto solución en el eje real:

1) $|x| \leq 2$

2) $|x| > 3$

3) $|x| < -2$

4) $|x| \leq 0$

5) $|x - 3| = 2$

6) $|x + \sqrt{2}| < 4$

7) $|x - 2| \geq \sqrt{3}$

Resuelve utilizando el concepto de distancia:

a) $|2x - 3| < 4$

b) $2 < |x - 1| \leq 3$



Respuestas a la ejercitación propuesta

Conjuntos numéricos

A) 5) Sí

B)

1) $-23,6$

2) 0

3) 9

4) Opuesto: 0

Inverso multiplicativo: No existe solución

5)

a. $x = 0$

b. $x = -2$

c. $x = 3 \vee x = -3$

6) $2a^{\frac{1}{2}}b^2$

7) $(-1)3x^3y^{-4}\sqrt[3]{3}$

8)

a. $\frac{18}{5}\sqrt[3]{5^2}$

b. $-3 - 4\sqrt{2}$

9)

a. $x = 36$

b. $x_1 = x_2 = -\sqrt{3}$

c. $x_1 = 1 ; x_2 = -1 ; x_3 = 2i ; x_4 = -2i$

10) Edad del padre: 54 años. Edad del hijo: 24 años.

Notación científica: $3 \cdot 10^{12}$. Notación estandar: 3.000.000.000.000

Inecuaciones

2)

a) $S = \left\{ \frac{11}{3}, +\infty \right\}$

b) $S = \left[-\frac{1}{2}, 3 \right]$



c) $S = (0, 1]$

d) $S = (-\infty, 0) \cup \left(\frac{6}{7}, +\infty\right)$

e) $S = [-2; 2]$

3) $\{3, 5, 7\}$ y $\{5, 7, 9\}$

Valor absoluto

1)

a) $x_1 = 2 \quad \wedge \quad x_2 = 1$

b) $x = -12$

c) $x_1 = -\frac{2}{3} \quad \wedge \quad x_2 = -\frac{2}{7}$

2) a) $|x| < 3$

b) $|x - 1| > 3$

3) $A = \emptyset$

Distancia en R

1) $-2 \leq x \leq 2$

2) $x > 3 \vee x < -3$

3) $\emptyset \vee \{ \} \vee$ No existe solución

4) $x = 0$

5) $x_1 = 1, x_2 = 5$

6) $S = (-\sqrt{2} - 4, -\sqrt{2} + 4)$

7) $S = (-\infty; 2 - \sqrt{3}] \cup [2 + \sqrt{3}, +\infty)$

a) $S = \left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$

b) $S = [-2, -1) \cup (3, 4]$



MISCELANEA PARA AUTOEVALUACION

1) Encuentra todos los conjuntos de tres naturales pares consecutivos cuya suma sea menor que 30 pero mayor que 14.

2) ¿Dónde está el error?

Partiendo de $2x + 6 < x + 3$, resulta que el conjunto solución es $S = (-\infty, -3)$, ahora bien, sacando factor común queda: $2(x + 3) < x + 3$, y dividiendo ambos miembros por $(x + 3)$, llegamos a

$$¿ 2 < 1 ?$$

3) a) Dada: $\frac{3x-2}{x+3} < 0$, encuentra el conjunto solución, y represéntalo en el eje real.

b) Dada $(2x + 5)(x - 1) < 0$, encuentra el conjunto solución y represéntalo en el eje real.

c) Dada: $\frac{x-3}{2x+1} > 0$, encuentra el conjunto solución, y represéntalo en el eje real.

d) Dada: $\frac{x+5}{x+2} < 2$, encuentra el conjunto solución, y represéntalo en el eje real.

4) Completa justificando brevemente:

a) Dada $|x - 3| \geq 5$, el conjunto solución es....., y se lee “la distancia de.....es.....”

b)
$$\frac{\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^3 \div \left[\left(\frac{25}{4}\right)^3\right]^{-\frac{3}{2}}}{\left(\frac{125}{8}\right)^3} = \dots\dots\dots$$

c) $2^{3/4} : 2^{3/4} : \sqrt{2^{-1}} \cdot (\sqrt[5]{2} : 2)^{5/4} = \dots\dots\dots$

d) Dada $|x + 2| \leq 5$, el conjunto solución es....., y se lee “la distancia de.....es.....”



$$e) \frac{\left[\left(\frac{4}{3} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^3 \div \left[\left(\frac{16}{9} \right)^3 \right]^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{64}{27} \right)^{-3}} = \dots\dots\dots$$

5) ¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta:

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^4 (x - 5) > 0 \Leftrightarrow x > 5$

b) El conjunto solución de $|x + \frac{3}{5}| \leq 5$ es $[\frac{22}{5}, +\infty)$.

c) $x \in \mathbb{R}, x^6 (x + 3) > 0 \Leftrightarrow x > 3$

$$d) \frac{\left[\left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^3 \div \left[\left(\frac{9}{4} \right)^3 \right]^{-\frac{3}{2}}}{\left(\frac{27}{8} \right)^3} = \frac{9}{4}$$

e) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 (x - 3) > 0 \Leftrightarrow x > 3$

$$f) \frac{\left[\left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{3}{2}} \right]^2 \div \left[\left(\frac{4}{9} \right)^3 \right]^{-\frac{3}{2}}}{\left(\frac{8}{27} \right)^3} = \frac{8}{3}$$

g) $\forall x \in \mathbb{R}, x^4 (x - 2) < 0 \Leftrightarrow x < 2$

h) $x + 1 > x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

i) $x^2 \geq x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$j) \left(\frac{a^{-\frac{5}{2}} b^{-10}}{32 a^2 b^{-2}} \right)^{-\frac{1}{5}} + \left(\frac{1}{4} + \left(\frac{4}{3} \right)^{-1} - 5^0 \right) = 2 a^{\frac{9}{10}} b^{\frac{8}{5}}$$



k) $-x \leq x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

l) $(x < y \wedge y \geq z) \Rightarrow x < z$

m)
$$\left(\frac{4^{\frac{5}{2}} a^{-6} c^2}{32 a^2 c^{-6}} \right)^{-\frac{1}{5}} + \left(\frac{1}{4} + \left(\frac{4}{3} \right)^{-1} - 3^0 \right) = a^{\frac{8}{5}} c^{-\frac{8}{5}}$$

n) $-x \leq x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

o) $(x < y \wedge y \geq z) \Rightarrow x < z$

p)
$$\left(\frac{4^{\frac{5}{2}} a^{-6} c^2}{32 a^2 c^{-6}} \right)^{-\frac{1}{5}} + \left(\frac{1}{4} + \left(\frac{4}{3} \right)^{-1} - 3^0 \right) = a^{\frac{8}{5}} c^{-\frac{8}{5}}$$

6) a) ¿Cómo lees la siguiente inecuación a partir del concepto de distancia en $\mathbb{R}$? $|x + 2| \leq 3$

b) Encuentra el conjunto solución aplicando dicho concepto.

7) a) Escribe simbólicamente la expresión: "la distancia entre x y 2 es mayor que 1 y menor que 5.

b) Representa en la recta numérica los valores de x que satisfacen la expresión del ítem a).

8) Encuentra tres números tales que al multiplicarlos su resultado es 2, al sumar el triple producto del segundo más el tercero se obtiene 9 y si se le resta el tercero al primero da 5.

9) Aplica propiedades para demostrar que: $|x^3| = |x|^3$

10) En un curso de Matemática habrá 5 evaluaciones parciales. Para aprobar se necesitan al menos 400 puntos. Tus calificaciones en las primeras cuatro evaluaciones fueron 91, 86, 73 y 79. ¿Qué nota necesitas en el quinto parcial para poder aprobar?

11) En tu trabajo te ofrecen dos formas de pago distintas:

Caso I: Un salario mensual de \$ 600.- más una comisión del 4 % sobre el total de ventas.

Caso II: Un salario mensual de \$ 800.- más una comisión del 6 % sobre el total de ventas una vez superados los \$ 10.000.-.

¿Para qué cantidad del total de ventas es mejor el Caso I que el Caso II, suponiendo que mensualmente las ventas superan los \$ 10.000.-?