SECRETARÍA ACADÉMICA

ÁREA INGRESO

Matemática

FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

- Setiembre de 2010 -

Ministerio de Educación
Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Rosario

SECRETARÍA ACADÉMICA

AREA INGRESO

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

Facultad Regional Rosario

Zeballos 1341 2000 – Rosario - Argentina
www.frro.utn.edu.ar
e-mail: ingreso@frro.utn.edu.ar

El objetivo de este Curso de Matemática es reafirmar y profundizar los conocimientos adquiridos hasta hoy. Se pretende generar un ámbito de información y de formación en el cual el aspirante a ingreso alcance los conocimientos y habilidades que le permitan el abordaje de las asignaturas del primer nivel de la carrera.

Elaboración del Material
Ing. Roberto López

Digitalización
Srta. Sonia Paladini
Ing. Diana Martínez
Sr. Leandro Corona

Revisión
Esp. Ing. Raquel Voget

Revisión y adaptación de la actual edición
Ing. Diana Martínez

Setiembre de 2020

ÍNDICE

Objetivos específicos pág.2

Funciones pág .5

Concepto general de función pág .5

Definición pág.5

Determinación del dominio pág.7

Determinación del rango o codominio pág.7

Gráfica de una función pág.7

Definición de función par pág.11

Definición de función impar pág.12

Definición de función periódica pág.12

Función creciente y decreciente pág.14

Estudio de algunas funciones elementales pág.16

Función constante pág.16

Función lineal pág.16

Función afin pág.17

Función $f(u)=u^2$ pág.18

La función recíproca pág.18

Función cuadrática (Trinomio de 2^{do} grado) pág.18

Primer caso pág.19

Segundo caso pág.19

Caso General pág. 20

Ceros del trinomio de 2^{do} grado pág.22

Conclusiones pág.23

Ejercicios propuestos pág.26

FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

1. FUNCIONES

1.1 CONCEPTO GENERAL DE FUNCIÓN

1.1.1 Definición:

Dados dos conjuntos A y B denominamos aplicación o función de A en B a toda ley que haga corresponder a cada elemento de A **un único elemento** de B.

El conjunto A se llama **conjunto de partida o dominio** y el conjunto B, **conjunto de llegada o conjunto de valores.**

La ley la indicamos, generalmente, con una letra minúscula f, g, h, etc.

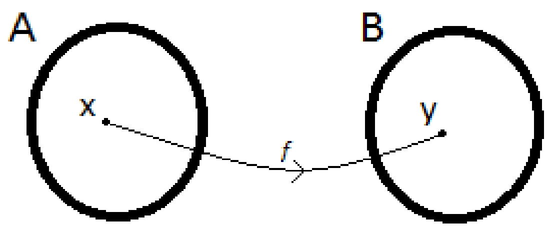


Figura 1

Dados los conjuntos **A** y **B**, y la ley **f**, si **x** ∈ **A** la ley le hace corresponder **y** ∈ **B** escribimos indistintamente:

x → y (a **x** corresponde **y**)

ó f:x → y (**f** aplicada a **x** da **y**)

ó y=f(x) (**y** es la imagen de **x**)

ó x → f(x) (a **x** corresponde **f** de **x**)

Ejemplos:

- Si es **A**= {x/x fue alumno del Colegio Nacional Nº 1 de la ciudad de Resistencia en 1970}

  B= $\Re$ = {números reales}

y **f** la ley, que a cada **x** $\in$ **A** le hace corresponder el promedio obtenido por x durante el año 1970 en el Colegio Nacional Nº 1 de Resistencia f resulta ser una función.

- Si A=B=$\Re$

La ley: x → 2 x + 1 es una función

En el presente curso, estudiaremos funciones de reales en reales, llamadas también **función real de una variable real,** son funciones para las cuales se tiene

$$A \subset \Re \quad y \quad B = \Re$$

De acuerdo con la definición, para definir una función deben darse tres elementos:

- El conjunto de partida
- El conjunto de llegada
- La ley

Sin embargo, en el presente curso y salvo casos específicamente indicados, la función se dará sólo por la ley conviniendo:

- El conjunto de definición, **A**, tiene como elementos aquellos números reales para los cuales la ley tiene significado.

Así, si f (x)= $\dfrac{1}{x-2}$, dado que el único real para el cual la ley carece de sentido es 2, resulta:

A = {x/x≠2}=(-∞; 2) U (2;+∞)

- El conjunto de valores, **B**, en lugar de todo $\Re$, es directamente el conjunto de las imágenes de los elementos de **A** y lo representaremos con el símbolo f (**A**), es decir, **B** es el rango o codominio de la función (conjunto de imágenes).

De acuerdo con este convenio, cada elemento de **B** es imagen de algún elemento de A, cuando se presenta esta situación, se dice que la función es sobre **B** o más brevemente, que la función es **suryectiva.**

Ejemplo:

Si g(x)=+ $\sqrt{x}$

se considera A=B= $\Re^+$ U {0}

En general, para estudiar una función real de una variable real, de la cual sólo se conoce la ley se procede como se indica a continuación.

1.1.2 Determinación del dominio

Se determina el conjunto de reales para los cuales la ley tiene sentido, lo que constituye el dominio de la función y, que simbolizaremos con **A_f, A_g, A_h,** si la letra usada para la ley es **f, g, h** respectivamente.

Ejemplos:

i) f(x)=3x , como existe el triplo de todo real x, es A_f==(-∞;+∞)

1.5.) h(x)= $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$, Como la inversa de un número existe siempre que éste sea distinto de cero, y la raíz cuadrada (en el campo real) está definida sólo para reales no negativos, resulta h definida para todo x tal que:

$$x+1>0 \Leftrightarrow x>-1 \quad \text{y por lo tanto } A_h = \{x/x>-1\} = (-1;+\infty)$$

1.1.3 Determinación del rango o codominio

Se determina el conjunto de las imágenes, lo simbolizaremos con **B_f, B_g, B_h**, etc.

Así resulta:

$B_f = \Re$ = (-∞;+∞)

$B_h = \Re^+$ = (0;+∞)

Ejercicio propuesto:

1.1.a.) Determinar A_f ; B_f ; f(1) y **x** tal que f(x)=2 para cada una de las funciones f que se dan a continuación

i) f(x) = x^2

ii) f(x) = $\frac{1}{x^2}$

iii) f(x) = $\sqrt{x^2}$

iv) f(x) = $\frac{1}{\sqrt{x}}$

v) f(x) = x + 1

vi) f(x) = $\sqrt{-x}$

1.2 GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Hemos visto que dada una función f, para cada x ∈ A_f, existe f(x) ∈ B_f, luego podemos obtener pares ordenados de reales (x;f(x)) donde como primera componente consideramos x ∈ A_f y como segunda componente su imagen perteneciente a B_f ; sabemos además que dado un sistema de referencia en el plano es posible lograr una correspondencia biunívoca entre puntos del plano y pares de números reales.

En virtud de esta correspondencia biunívoca entre puntos del plano y pares ordenados de números reales, podemos representar en el plano el conjunto de puntos (x; f(x) , $\forall x \in A_f$.

Ese conjunto de puntos recibe el nombre de gráfica de la función f.

Ejemplo:

Sea f la función de dominio A = {2;3;-1; 0} definida de la siguiente manera:

f (2)= 5

f (3) = 0

f (-1) = 2

f (0) = 2

Su gráfica la constituyen los puntos del plano cuyas coordenadas son: (2;5); (3;0); (-1;2); (0; 2) y que hemos representado en la figura 2

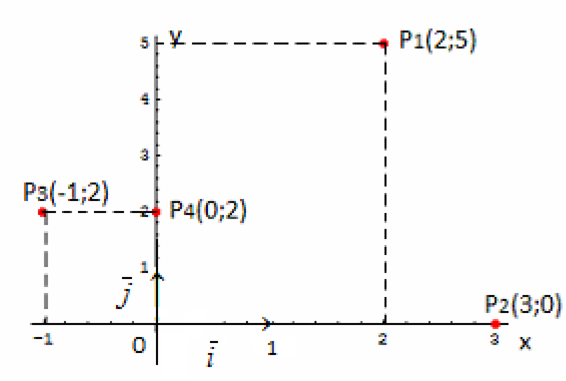


Figura 2

Ejemplo:

Sea g la función

$$g(x)=\begin{cases} 3 \text{ si } x \leq -2 \\ 1 \text{ si x } -2 < x < 0 \\ 0 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

Su dominio es $A_g = \Re$, su rango B_g = {3;1;0} , Su grafica resulta:

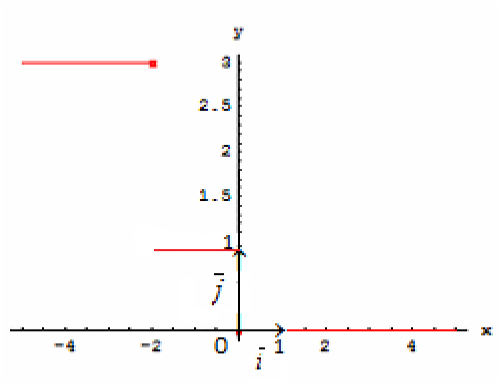


Figura 3

Observación:

De acuerdo con la definición de función para cada x ∈ A_f debe existir en correspondencia un solo valor f(x), luego la gráfica de una función es tal, que trazando paralelas al eje y, éstas se intersecan con la curva en un solo punto, pues si la cortaran en más de uno, para ese x habría dos o más imágenes.

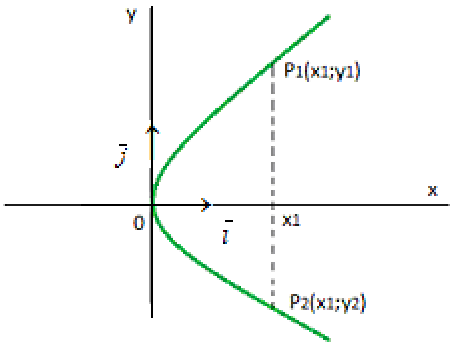


Figura 4 - no representa una función

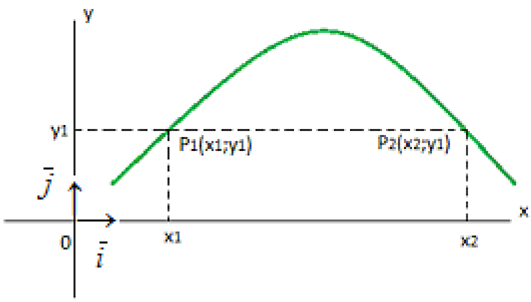


Figura 5

esta gráfica corresponde a una función

Un caso particular de función es aquel en el que todo elemento de B_f es imagen de un único elemento de A_f. Cuando se presenta esta situación decimos que la función es **inyectiva**.

Dada una **función inyectiva** (uno a uno) que además sea suryectiva (todo elemento de B es imagen de alguno de A_f), llamamos a tal **función correspondencia biunívoca** o simplemente **función biyectiva** (también se abrevia diciendo que la función es una biyección).

La figura 6 es un ejemplo de una biyección del conjunto [a,b] en [c,d], en cambio la figura 5 es la gráfica de una **función no inyectiva**.

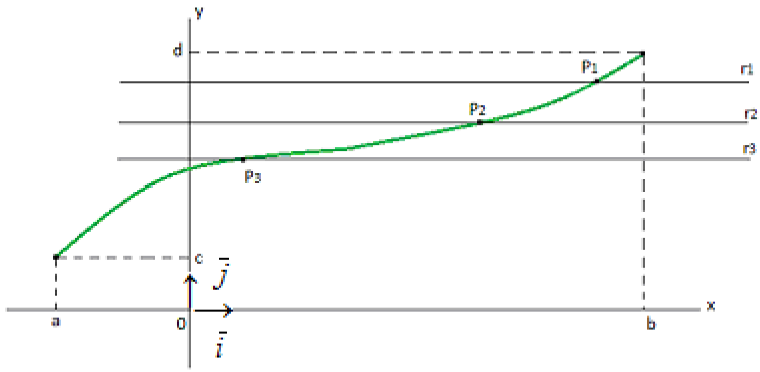


Figura 6

Ejemplo:

f(x) = x y $A_f = \{x / 0 \le x \le 4\} = [0;4]$

la gráfica resulta

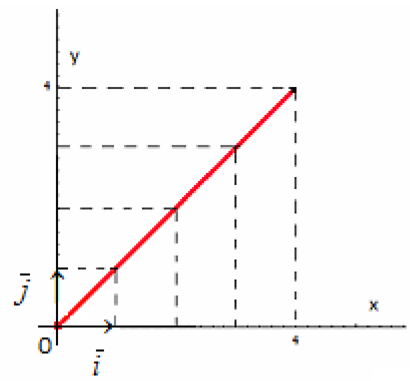


Figura 7

Ejemplo:

f(x) = [x]

[x] se lee **"parte entera de x"** y por definición es el mayor entero que no supera al número dado x o expresado de otra manera, es el mismo número x si x es entero, o es el primer entero a la izquierda de x si x no es entero.

Así [3] = 3 [1,4] = 1

[-2] = -2 [-2,5] = -3

Tiene a $\Re$ como dominio. La gráfica es la de la figura 8.

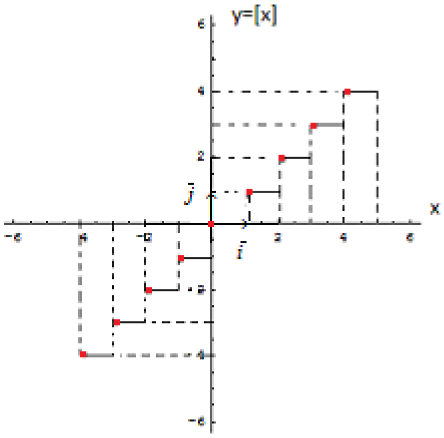


Figura 8

Su codominio es Z. Esta función no es una correspondencia biunívoca.

Ejercicio propuesto:

1.2.a.)Indicar entre los conjuntos que siguen aquellos que definen una función, graficarlas y señalar además las que sean biyectivas (suponemos que el conjunto de valores coincide con el conjunto de las imágenes).

i) { (x,y)/ 2y=x}

ii) { (x,y)/ x+y =5}

iii) { (x,y)/ y =[x]+ 1}

iv) { (x,y)/ -2x = 5}

v) { (x,y) / y = 8}

vi) { (x,y)/ y^2 = 4}

1.3. DEFINICIÓN DE FUNCIÓN PAR

Dada f: A → B

Se dice que **f es par** si se verifica que f (x) = f (-x) $\forall x \in A_f$.

Si una función es par y un punto (a,b) pertenece a su gráfica, también pertenece a la misma el punto (-a,b); por lo tanto, resulta simétrica respecto del eje y.

Cuando se tiene una función par, para determinar su gráfica, basta estudiar la gráfica correspondiente a la parte positiva.

Ejemplo:

Sea f (x) = $|x|$ siendo $|x| = |-x|$ resulta una función par, por lo tanto basta hacer el estudio para los valores de x > 0 , y luego completar por simetría, la gráfica resulta la de la figura II.9.

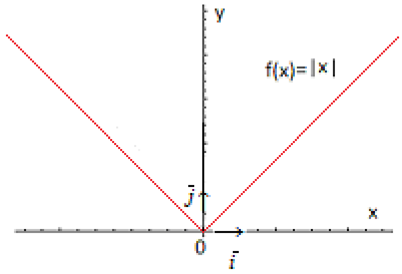


Figura 9

1.4. DEFINICIÓN DE FUNCIÓN IMPAR

Si f es una función para la cual resulta f (x) = -f (-x) $\forall x \in A_f$, se dice que la función es impar.

De la definición resulta que si (a,b) pertenece a la gráfica también pertenece a la misma (-a,-b); la gráfica es por lo tanto simétrica respecto del origen.

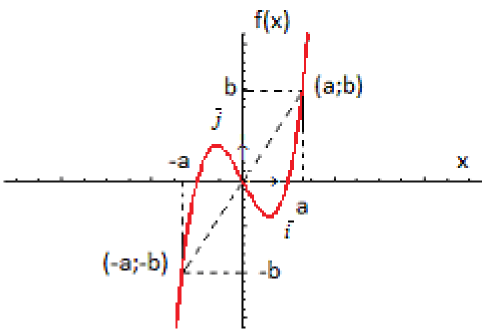


Figura 10

Propiedad de la función impar

$0 \in A_f$ f (0) = 0

En efecto:

Sea f (0) = a, entonces se tiene

(a = f (0) = -f (-0) = -f(0) = -a) $\Leftrightarrow$ a = 0

1.5. DEFINICIÓN DE FUNCIÓN PERIÓDICA

Dada una función f de $\Re$ en $\Re$ se dice que es periódica de período k si $\forall x \in \Re$ se verifica que f(x)=f(x+k).

El **número k** se denomina **período** de la función.

Naturalmente una función de período k es también periódica de período pk con p $\in Z$.

En efecto:

f(x-4k)= f(x-3k)= f(x-2k)= f(x-k)= f(x)= f(x+k)= f(x+2k)=...

En general: f(x) = f (x+k) f(x) = f(x+pk) $\forall$ p $\in Z$

Si f es periódica de período k y un punto (a,b) pertenece a su gráfica, también pertenece a la misma el punto (a+k;b), por lo tanto basta conocer la gráfica y el comportamiento de una función correspondientes a un intervalo [a,a+k) $\subset \Re$ para conocer la función.

La figura 11. resulta el gráfico de una función periódica.

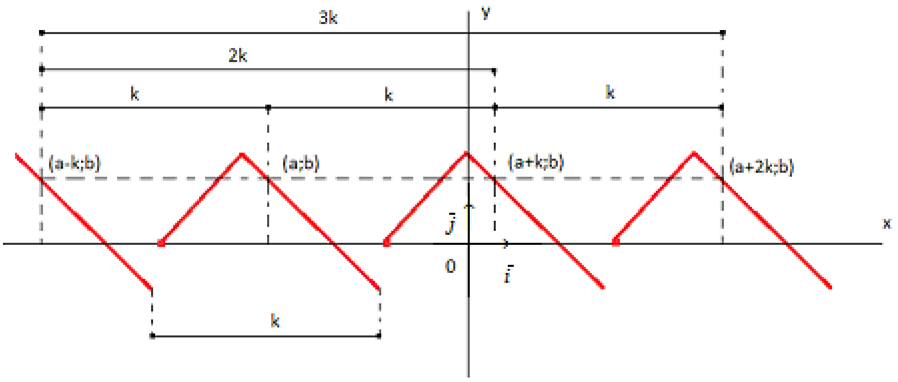


Figura 11

Ejercicios propuestos:

1.5.a) Probar f periódica $\Rightarrow$ f no biyectiva

1.5.b.) Señalar entre las funciones que se dan a continuación las pares y las impares.

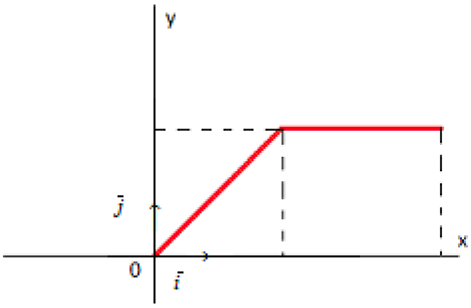
i) f(x) = $|x|$

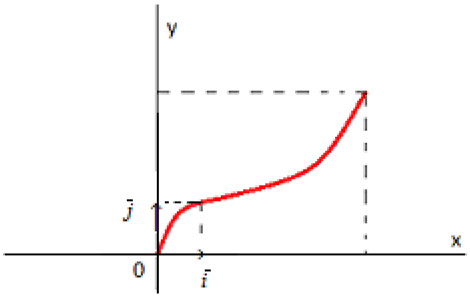
ii) g(y) = y^2

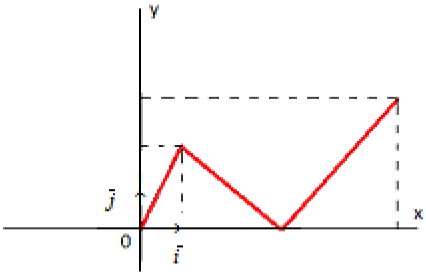
iii) h(z)= $\dfrac{1}{z^2+2}$

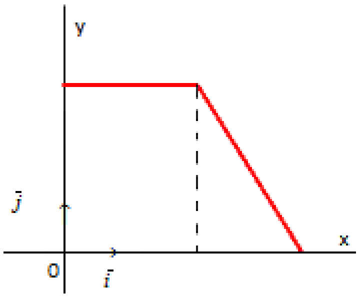
iv) k(u) = u^3

1.5.c.) Completar las gráficas i) y ii) de modo que resulten gráficas de funciones pares, y las iii) y iv) de modo que resulten impares.

i) 

ii) 

iii) 

iv) 

1.6. FUNCION CRECIENTE Y DECRECIENTE

Dada una función f de dominio A $\subset \Re$, si para todo par de puntos x_1,x_2 de A se tiene:

i) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

se dice que f es creciente en A

ii) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

se dice que f es no decreciente en A.

iii) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

se dice que f es decreciente en A.

iv) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

se dice que f es no creciente en A.

Una función del tipo de i), ii), iii) o iv) se dice **monótona.** Las figuras 12, 13; 14; 15 ilustran cada uno de estos casos.

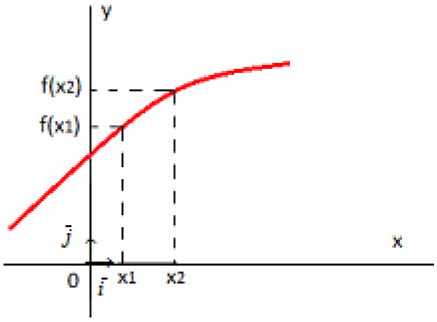


Figura 12

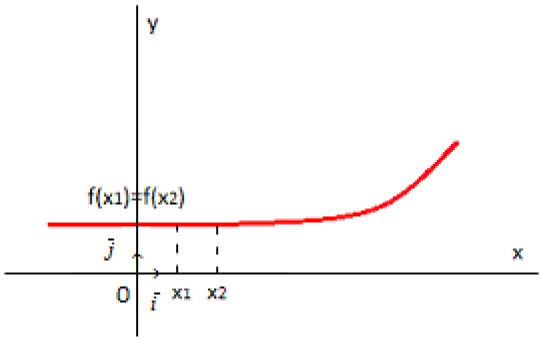


Figura 13

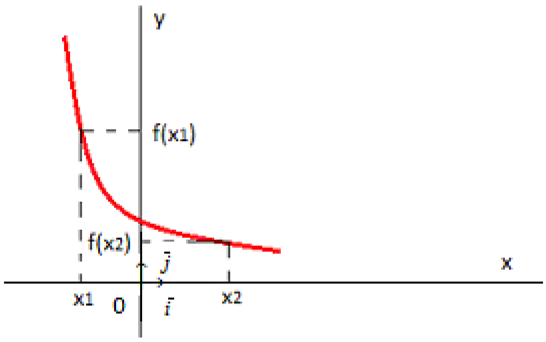


Figura 14

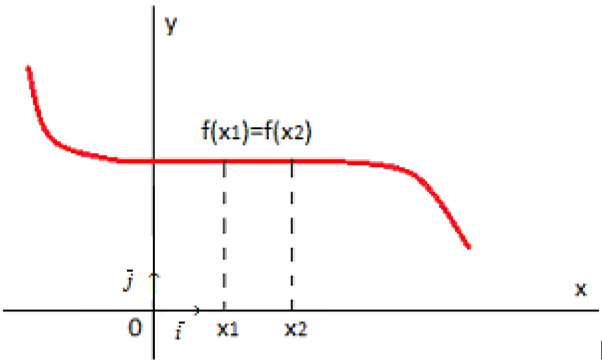


Figura 15

2. ESTUDIO DE ALGUNAS FUNCIONES ELEMENTALES

2.1. FUNCION CONSTANTE

Se denomina así a la función

$$f(x) = k$$

Resulta $A_f = \Re$; $B_f = \{k\}$ y su gráfica la de la figura 16

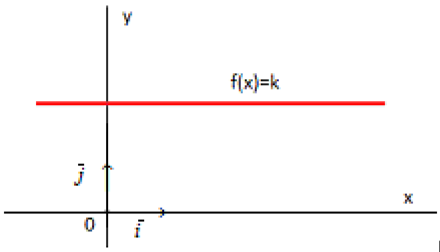


Figura 16

Ejercicio propuesto

2.1.a.) decir si la función constante es par, impar, periódica, o monótona.

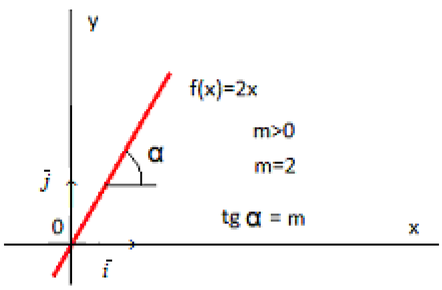
2.2. FUNCIÓN LINEAL

Se denomina así a una función de la forma **h(x) = m x** con **m ≠ 0**

Resulta $A_h = \Re$, ya que dado $m \in \Re$ para todo real x está definido el producto mx.

También es $B_h = \Re$ ya que siendo m≠0, dado un real y cualquiera, siempre existe un x tal que mx = y.

El alumno ya sabe que la gráfica es una recta que contiene el origen de coordenadas, ya que f(0)=0; además f(1)=m recibe el nombre de **pendiente** de la recta.



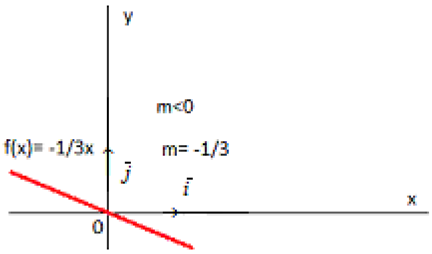


Fig. 17

Ejercicios propuestos:

2.2.a.) Probar que la gráfica de la función lineal es una recta

2.2.b.) Decir si la función lineal es par o impar, justificando la respuesta

2.2.c.) Establecer en que caso la función lineal es creciente o decreciente.

2.3. FUNCIÓN AFÍN

Se llama así a una función de la forma

$$g(x)=m\,x + h \qquad m\neq 0 \quad h\neq 0$$

También aquí $A_g=B_g=\Re$ y la grafica es una recta que interseca al eje **y** en el punto (0; h); h recibe el nombre de **ordenada al origen.**

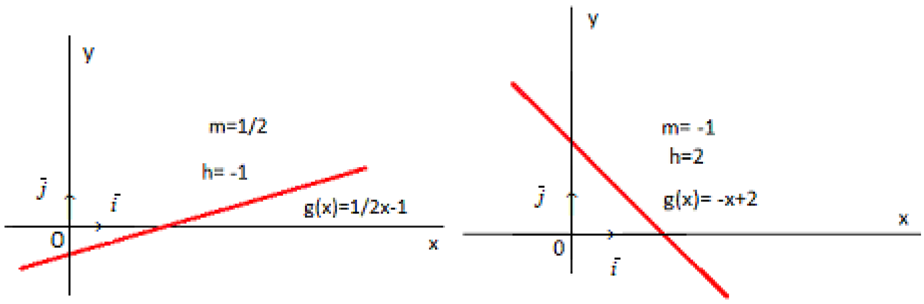


Fig. 18

Ejercicio propuesto:

2.3.a.) Dada g(z) =mz + h, probar:

i) $A_g=B_g=\Re$

ii) La gráfica de g es una recta.

iii) La intersección es una recta con el eje y es el punto (0;h).

iv) Decir si es una función par o impar.

v) Establecer en que caso es creciente o decreciente.

2.4. FUNCIÓN $f(u) = u^2$

En este caso se tiene $A_f = \Re$ y $B_f = \Re^+_0$

La gráfica es la de la figura II. 19

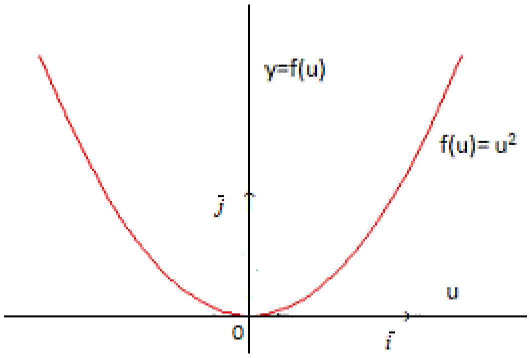


Figura 19

Ejercicio propuesto:

2.4.a.) Dada $f(u) = u^2$, probar:

i) $A_f = \Re$ $B_f = \Re_0^+$

ii) El origen pertenece a la gráfica

iii) f es par

iv) f es creciente en $\Re_0^+$ y decreciente en $\Re_0^-$

2.5. LA FUNCIÓN RECÍPROCA

Se llama así a la función $g(v) = \dfrac{1}{v}$

En este caso es $A_g = B_g = \Re - \{0\}$. La gráfica es la de la figura II. 20

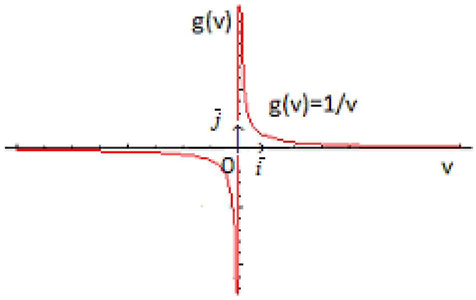


Fig. 20

Ejercicio propuesto:

2.5.a.) Dada g(v) = $\dfrac{1}{v}$ probar:

i) $A_g = B_g = \Re - \{0\}$

ii) g es impar

iii) g es decreciente en $\Re^-$ y en $\Re^+$, pero no en A_g

3. FUNCION CUADRÁTICA (Trinomio de 2do grado)

Se llama **función CUADRATICA** a la función f que sigue

f(x) =**ax^2+bx+c**

con a,b y c reales y a = 0

Es posible que esta función, al igual que la línea, ya sea conocida; pero dada la frecuencia con que la misma aparece en distintas cuestiones creemos oportuno hacer una revisión completa de la misma.

Por comenzar del apartado 2.4. se conoce la gráfica de f en el caso a=1 ; b=c=0 , resultando la gráfica de $f_1(x) = x^2$ la indicada en figura 62.

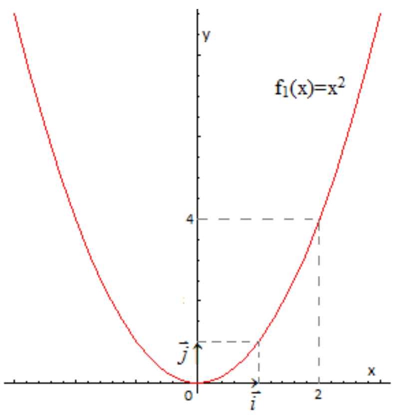


Figura 62

A partir de f, y por sucesivas aplicaciones de las conclusiones del apartado anterior llegaremos a completar el estudio de f.

3.1. PRIMER CASO: ***b = c = 0 a ≠ 0***

Resulta $f_2(x) = af_1(x) = ax^2$

Y por lo tanto la gráfica, que se llama parábola, será al igual que la de f_1 una curva simétrica respecto del eje y, tal como las indicadas en figura II63 para a = ±1; a = ±3 ; a = $\pm\frac{1}{3}$

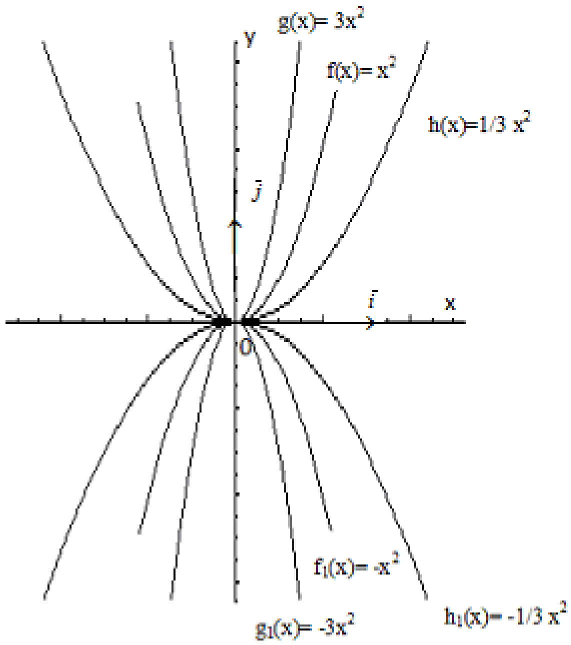


Figura 63

Se llama **vértice de la parábola** a la intersección de la parábola con su eje de simetría (en ese punto la parábola tiene como tangente la perpendicular a su eje).

Según que **a >0** o **a <0** se dice que la parábola tiene su **CONCAVIDAD** hacia arriba o hacia abajo respectivamente.

3.2. SEGUNDO CASO: ***b = 0 c ≠0***

Sea $f_3(x) = ax^2+c$

En este caso y siempre atendiendo a las conclusiones del apartado anterior, se tiene como gráfica la misma parábola pero desplazada en el sentido del eje y. El eje de la parábola es por lo tanto el mismo eje y, y el vértice el punto (0;c), ver figura 64

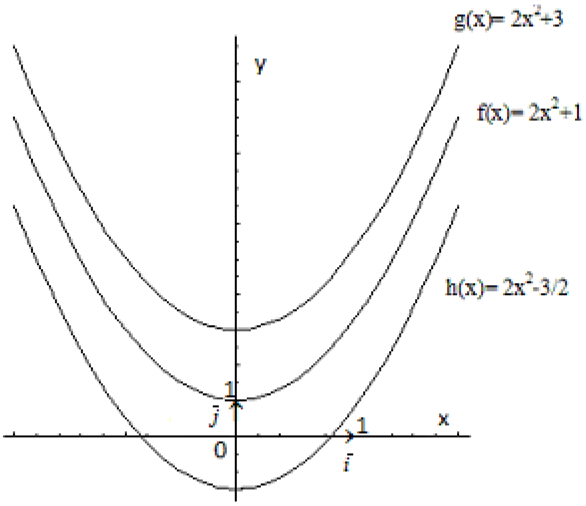


Figura 64

3.3. CASO GENERAL: ***a≠0 b≠0 c≠0***

$$f(x) = ax^2+bx+c$$

Siendo a≠0 puede escribirse

$$f(x)= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

Y recordando la identidad $(p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$ puede hacerse las siguientes transformaciones

$$f(x) = a(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}) = a(x+\frac{b}{2a})^2+(c-\frac{b^2}{4a}) = a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

Que para simplificar escribimos

$$f(x) = a(x + h)^2 + k \qquad \text{donde} \quad h = \frac{b}{2a} \quad \text{y} \quad k= \frac{4ac-b^2}{4a}$$

De esta última resulta que la gráfica de f es la misma parábola $f_2(x) = ax^2$ pero desplazada en el sentido del eje x según lo indica h y en el sentido del eje y según indica k, de modo que el vértice que en la parábola $f_2(x) = ax^2$ es el origen (0;0) pasa a ser el punto (-h;k) y el eje de la parábola es la recta paralela al eje y de ecuación x = -h ; estando la concavidad hacia arriba o hacia abajo según sea “a” mayor o menor que cero.

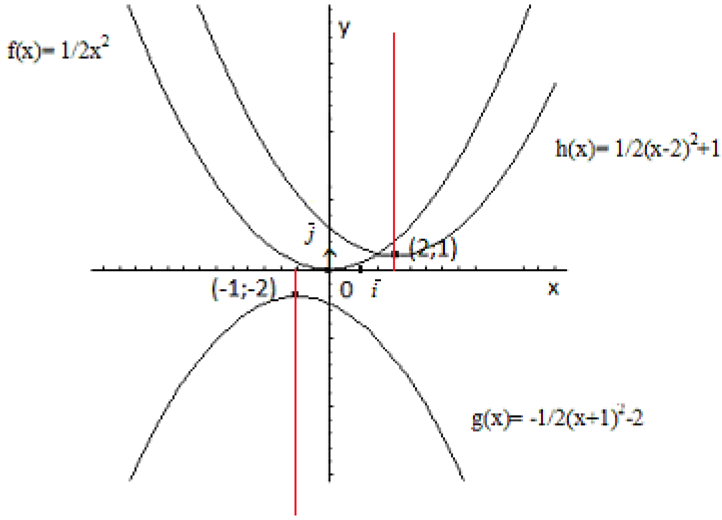


Figura 65

EJERCICIO PROPUESTO:

4.3.a.) Dibujar las parábolas, graficas de las funciones que siguen:

i) f(x) = $2x^2 - 12x + 17$

ii) g(x) = $\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{5}{2}$

iii) h(x) = $-2x^2 - 4x - 2$

iv) q(x) = $-\frac{1}{3}x^2 + 2x - 1$

Solución de v):

Se tiene: l(x) = $-\frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}(x^2 - 5x) - \frac{4}{3} =$

$$= -\frac{1}{3}(x - \frac{5}{2})^2 + \frac{25}{4} - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}(x - \frac{5}{2})^2 + \frac{3}{4}$$

Entonces la gráfica de l(x) es una parábola de eje paralelo al eje y, con la concavidad hacia abajo y con vértice en el punto $\left(\frac{5}{2};\frac{3}{4}\right)$, resultando la de la figura 66.

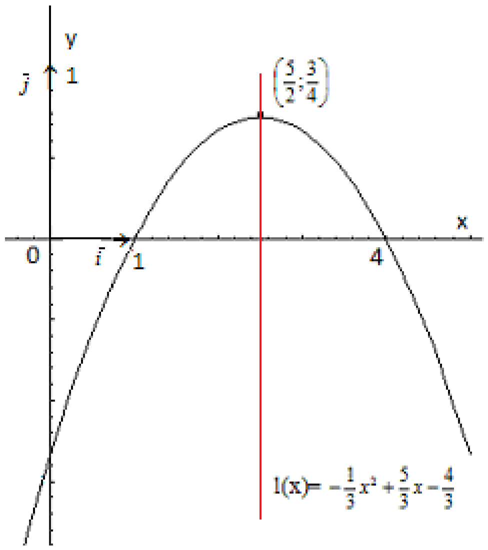


Figura 66

NOTA:

Es muy importante que al resolver los ejercicios el alumno trabaje como se ha indicado en el ejemplo resuelto, es decir no debe recordar las relaciones entre a, b y c y las coordenadas del vértice, sino trabajar algebráicamente para determinarlas.

3.4 CEROS DEL TRINOMIO DE 2º GRADO

Dada una **función f** si existe un **α** tal que **f(α) = 0**, se dice que **α** es un **cero de f**.

De lo anterior resulta que si una función f tiene un cero α, la gráfica de f interseca al eje x en el punto (α;0).

Del estudio gráfico que acabamos de hacer resulta que $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene ceros en algunos casos (cuando interseca el eje x).

Procuraremos determinar analíticamente dichos ceros.

Antes que nada observamos que si un numero α es un cero de $f(x) = + ax^2 + bx + c$, también lo es de la función opuesta $- f(x) = - ax^2 - bx - c$, motivo por el cual en el estudio que sigue suponemos que a es positivo (a 0); se tiene

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = 0 \Leftrightarrow \quad (x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) = 0 \text{ ó } \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ ó.} x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)$$

De esta última concluimos:

Si $\frac{b^2 - 4ac}{2a} \geq 0$ existen ceros para f(x) = $ax^2 + bx + c$ y estos ceros son

$\alpha_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $\qquad$ $\alpha_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Los **ceros de f(x) = $ax^2 + bx + c$** se llaman también **raíces de la ecuación** $ax^2 + bx + c = 0$

Si α_1 y α_2 son los ceros de f , observando las sucesiones de implicaciones anteriores resulta que puede escribirse

$f(x) = a (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$

3.5. CONCLUSIONES:

1°) La grafica de $f(x)=ax^2+ bx + c$ es una parábola de eje paralelo al eje y, de vértice $\left(\frac{-b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$

y cuya concavidad esta dirigida hacia arriba o hacia abajo según que a sea mayor o menor que cero respectivamente.

2°) La parábola intersecta al eje x si $b^2 - 4ac \geq 0$

3°) Gráficamente se dan las siguientes posibilidades:

i) **$b^2 - 4ac > 0$**

En este caso **existen dos ceros α_1 y α_2**, supongamos $\alpha_1 < \alpha_2$; por razones de simetría el eje de la parábola será la recta de ecuación $x=\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$ (es fácil probar que en todos los casos $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = -\frac{b}{2a}$) y según que a sea positivo o negativo se tienen las situaciones ilustradas en figuras II67 y II68.

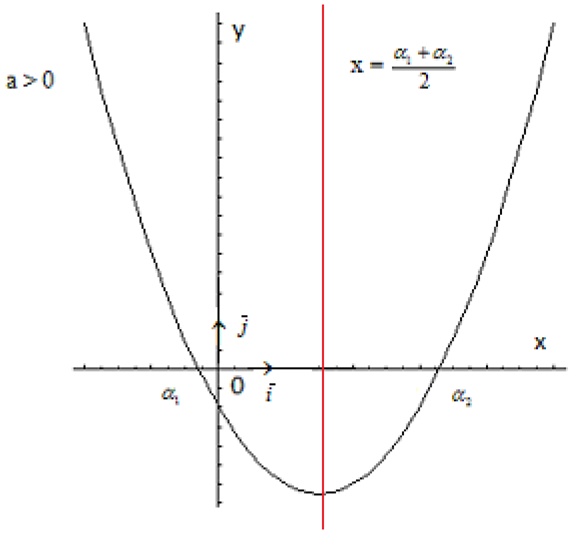
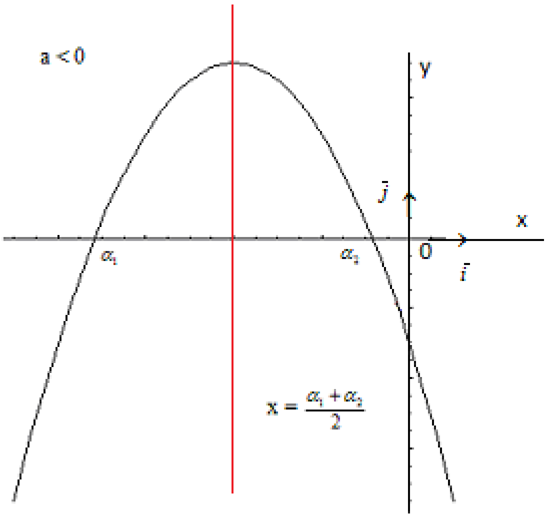


Figura 67

Si x = α_1 ó x = α_2 es f(x) = 0

Si x ∈ $(\alpha_1 ; \alpha_2)$ resulta f(x) < 0

Si x ∈ $(-\infty;\alpha_1) \cup (\alpha_2; +\infty)$ entonces f(x) > 0



Si x = α_1 ó x = α_2 es f(x) = 0

Si x ∈ $(\alpha_1 ; \alpha_2)$ resulta f(x) > 0

Figura 68

Si x ∈ $(-\infty;\alpha_1) \cup (\alpha_2; +\infty)$ entonces f(x) < 0

ii) **$b^2 - 4ac = 0$**

En este caso **existe un solo cero α** = $-\dfrac{b}{2a}$ (se dice que la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene dos raíces coincidentes) siendo el eje de la parábola la recta x = α y dependiendo del signo de a, hacia donde está dirigida la concavidad, la función puede presentar una de las situaciones ilustradas en las figuras II69 y II70.

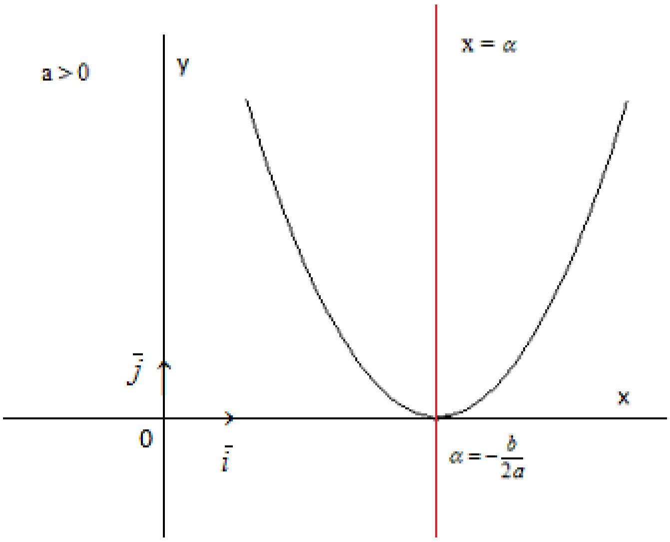


Figura 69

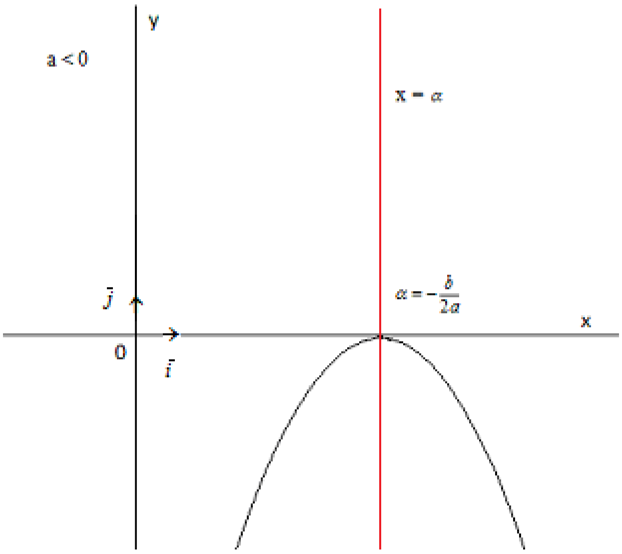


Figura 70

Si x = α entonces f(x) = 0

Si x = α entonces f(x) > 0

Si x = α entonces f(x) = 0

Si x ≠ α entonces f(x) < 0

iii) $b^2 - 4ac < 0$

En este caso no existen ceros de f y por lo tanto la parábola no corta al eje x pudiendo presentarse los dos ilustrados en las figuras II.71 y II.72.

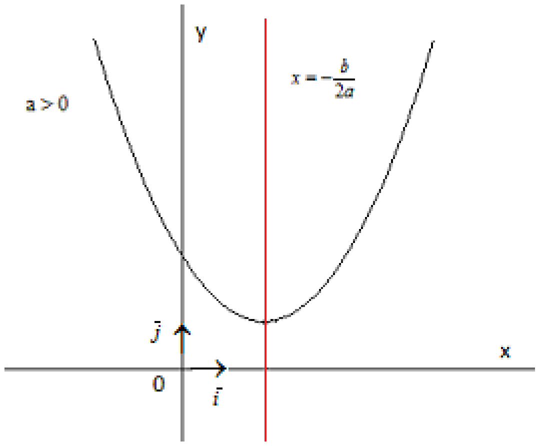


Figura 71

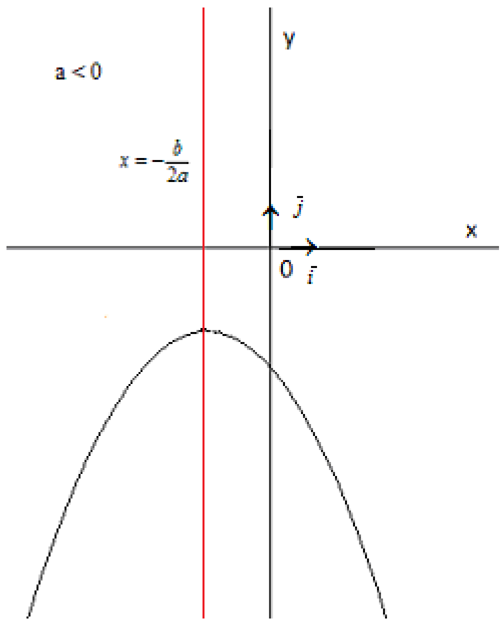


Figura 72

es f(x) > 0 $\forall x \in \Re$

Es f(x) < 0 $\forall x \in \Re$

<u>4. EJERCICIOS PROPUESTOS:</u>

4.1.) Dibujar las gráficas de las funciones que siguen, determinando en cada caso los ceros y los conjuntos: { x/ f (x) > 0 } ; { x/ f (x) < 0 }

i) f(x) = $x^2 - 2x + 7$

ii) f(x) = $\sqrt{2}x^2 - 4\sqrt{3}x + 4\sqrt{2}$

iii) f(x) = $2x - 4x^2 - 1$

iv) f(x) = $3(x - 1)(x + 2)$

v) f(x) = $2x^2 - 5x + 6$

vi) f(x) = $-x^2 - 3x - 2$

vii) f(x) = $-\frac{1}{3}x^2 + 5x - 6$

5.2.) Indicar los conjuntos en que están definidas las funciones que se indican a continuación, asi como los conjuntos en los cuales la función es positiva o negativa; representar dichos conjuntos sobre un eje real.

i) f(x) = $\dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1}$

ii) g(x) = $2\sqrt{3(x-1)(x+2)}$

iii) k(x) = $\dfrac{2}{\sqrt{-2x^2 + 6x + 8}}$

iv) h(x) = $\sqrt{-3x^2 - 7x + 2}$

<u>EJEMPLO 4.2.1 :</u>

Determinar los valores de x para los cuales resulta $\dfrac{x^2 - 3x - 4}{x + 1} > 0$

Solución:

Será $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$ par un x_1 dado si y solo si el signo de $f(x_1)$ es igual al signo de $g(x_1)$. Gráficamente habrá que determinar para que valores de x están las dos gráficas en un mismo semiplano respecto del eje x.

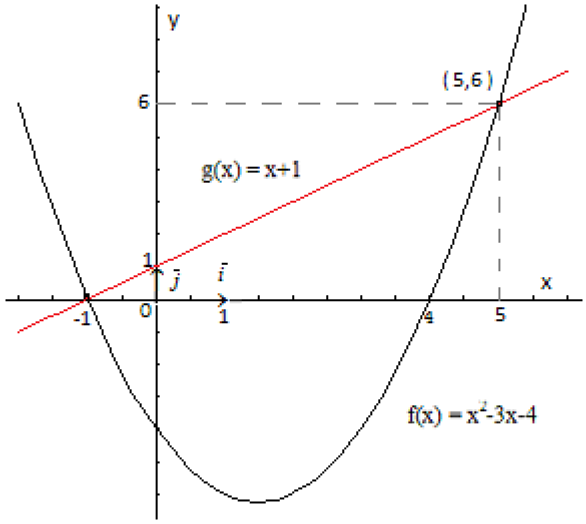


Figura 73

De la figura 73 se tiene que la desigualdad se verifica para

$$x \in (4;+\infty)$$

Ejemplo 4.2.2:

Determinar los valores de x para los cuales resulta

$$x^2 - 3x - 4 \geq x + 1$$

Solución:

Gráficamente, dado un real x_1 resulta $f(x_1) > g(x_1)$si al recorrer la recta $x = x_1$ en el sentido creciente de la y , se encuentra primero la gráfica de g y después la de f.

De la figura II73 se deduce que los valores de x satisfacen la desigualdad son los x pertenecientes al intervalo (-∞;-1] o al intervalo [5;+-∞)

Ejemplo 4.2.3:

Determinar los valores de x que verifican

$$\frac{|2x-2|}{|x-4|} \geq 1$$

Solución:

De la figura 74 resulta que la desigualdad se verifica para los x pertenecientes al intervalo [x_1 ;+∞) o para los x pertenecientes al intervalo (-∞; x_2], donde (x_1,y_1) es la intersección de las rectas y=2x-2 e y=-(x-4) y el punto (x_2,y_2) la intersección de las rectas y=-(2x-2) e y=-(x-4). Resulta $(x_1,y_1) = (2;2)$ y $(x_2;y_2) = (-2;6)$, por lo tanto se tiene que la desigualdad se verifica si:

$x \in (-\infty;-2] \cup [2;-\infty)$

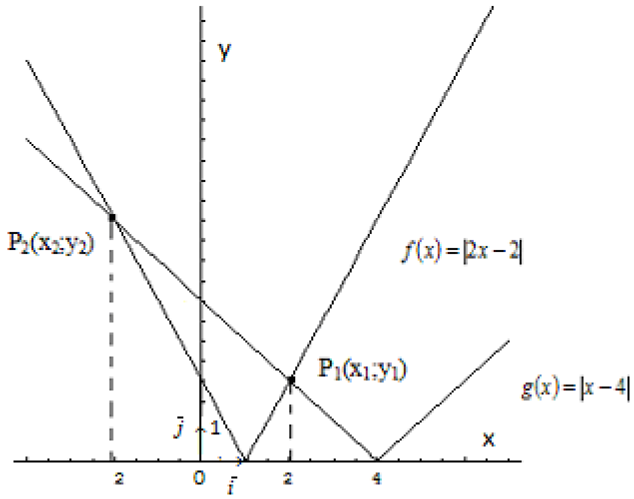


Figura 74

5.3.) Determinar los valores de x que satisfacen:

i) $\dfrac{(x-3)^2}{4x} \leq 0$

iii) $\dfrac{2x^2+2x-4}{x+2} < 0$

ii) $\dfrac{x-1}{2x^2-10x+8} \leq 0$

iv) $\dfrac{\left|\frac{1}{2}x+1\right|}{x^2-\frac{1}{2}x-1} < 1$