



*Ministerio de Educación
Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Rosario*

**SECRETARÍA ACADÉMICA
AREA INGRESO**

Matemática

- Septiembre de 2010 -

SECRETARÍA ACADÉMICA
ÁREA INGRESO
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
Facultad Regional Rosario

Zeballos 1341

2000 – Rosario - Argentina

www.frro.utn.edu.ar

e-mail: ingreso@frro.utn.edu.ar

El objetivo de este Curso de Matemática es reafirmar y profundizar los conocimientos adquiridos durante el nivel de enseñanza del polimodal. Se pretende generar un ámbito de información y de formación en el que el aspirante alcance los conocimientos y habilidades que le permitan el abordaje de las asignaturas del primer nivel de la carrera.

Elaboración del Material

Ing. Guillermo Cibils

Fuente

Material de Ingreso elaborado por Lic. Eduardo Fongi, Lic. María I. González

Digitalización

Máster Rosa R. Maenza

Revisión y ampliación

Esp Est. Graciela Gervasoni

Revisión y ampliación de la actual edición

Ing. Diana Elina Martínez



INDICE

Objetivos Específicos	1
Polinomios.....	2
Definición:	2
Nombres Especiales.....	2
Grado de un Polinomio.....	3
Valor numérico de un Polinomio.	3
Igualdad de Polinomios	4
Polinomios opuestos.....	4
Operaciones con Polinomios	4
Suma y resta de Polinomios	4
Producto de Polinomios	5
Productos notables	6
Cuadrado de un binomio.....	6
Cubo de un binomio.	6
Producto de la suma de dos términos por la diferencia de los mismos	6
División de Polinomios.....	7
Regla de Ruffini	8
Teorema del Resto	10
Raíces de un Polinomio.....	11
Factorización de Polinomios	12
Teorema de descomposición factorial de polinomios	12



Teorema fundamental del álgebra	13
Casos de factorio	13
Factor común	13
Factor común por grupos	13
Forma factorizada de un polinomio de segundo grado	14
Trinomio cuadrado perfecto	14
Cuatrinomio cubo perfecto	14
Diferencia de cuadrados	14
Teorema de Gauss	15
Aplicación	15
Divisibilidad de la suma o diferencia de potencias de igual grado por la suma o diferencia de las bases	15
Expresiones algebraicas racionales	16
Simplificación de expresiones racionales	17
Operaciones con expresiones racionales	17
Adición	17
Sustracción	18
Multiplicación	19
División	19
Ejercicios resueltos.....	20
Ejercicios propuestos.....	26
Respuestas:	30



Objetivos Específicos

- Identificar tipos de polinomios: monomios, binomios, trinomios y sus elementos.
- Conocer las relaciones de igualdad definidas para polinomios.
- Operar con polinomios: sumar, restar, multiplicar, dividir.
- Factorizar polinomios.
- Simplificar fracciones racionales.
- Operar con fracciones racionales.
- Determinar si un número real dado es, o no, raíz de un polinomio dado
- Utilizar la relación entre el concepto de raíz de un polinomio y el de divisibilidad de polinomios.
- Distinguir la diferencia entre la igualdad de fracciones racionales y la igualdad entre los valores numéricos de las mismas.
- Poder expresar una fracción racional como un polinomio o como suma de un polinomio más otra fracción racional cuyo denominador tenga grado menor que el del denominador.



EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Polinomios

Definición:

En lenguaje coloquial podemos decir que un polinomio en una variable es una expresión con uno o más términos que se suman o restan y donde los exponentes de la variable deben ser enteros positivos o cero.

Simbólicamente, un polinomio en una variable es una expresión de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0$$

donde n es un entero positivo o cero, x es una variable y $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ son números reales constantes (también pueden llegar a ser números complejos) llamados **coeficientes**.

Al número $a_n \neq 0$ se lo llama coeficiente principal. El número a_0 es el término constante o independiente.

Se indica $R[x]$ para representar al conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales.

Ejemplos:

- | | |
|---------------------------|---|
| a) $-2x^2 + 6x + 7$ | coeficientes: 6, -2 y 7. Término independiente: 7 |
| b) $x + 4$ | coeficientes: 1, 4. Término independiente: 4 |
| c) $2x^4$ | coeficiente: 2. Término independiente: 0 |
| d) 45 | coeficiente: 45. Término independiente: 45 |
| e) $3x^3 - 8x^2 - x + 25$ | coeficiente: 3, -8, -1. Término independiente: 25 |

Pregunta:

¿Las expresiones dadas a continuación son polinomios de una variable? Justifica.

$$2x^{1/3} + 5$$

$$4(x)^{-1/2} - 2 + 3x$$

Nombres Especiales

El prefijo poli significa "muchos". Polinomio significa entonces "muchos términos". Las expresiones polinomiales que contienen uno, dos, tres o cuatro términos se conocen respectivamente como monomio, binomio, trinomio y cuatrinomio. Cabe aclarar que no se les dan nombres especiales a los polinomios de cinco términos en adelante.

Así, considerando los ejemplos anteriores, a) es un trinomio, b) un binomio, c) y d) son monomios y e) es un cuatrinomio



Grado de un Polinomio

El grado de un polinomio está dado por el mayor exponente del término de coeficiente no nulo (el valor al que se eleva la variable del coeficiente principal). Se simboliza $\text{gr}(P(x))$.

Simbólicamente:

Si $a_n \neq 0$, n es el grado del polinomio.

Normalmente los polinomios se escriben ordenados según los grados de sus monomios de mayor a menor. En ocasiones parece que "falta" alguno de los monomios intermedios. Eso es así porque el coeficiente de ese monomio es cero y, por tanto, no se escribe.

Nota: si un polinomio tiene todos sus coeficientes iguales a cero, se lo denomina polinomio nulo y carece de grado.

Ejemplo:

En los casos dados anteriormente

- | | |
|---------------------|---|
| a) $-2x^2 + 6x + 7$ | Grado del polinomio: 2 |
| b) $x + 4$ | Grado del polinomio: 1 |
| c) $2x^4$ | Grado del polinomio: 4 |
| d) 45 | Grado del polinomio: 0. Denominado polinomio constante. |

Complete:

- $3x^6 + 7x^3 - 2$ es un polinomio de grado y su coeficiente principal es
- $-1/2 x^5$ es un polinomio de grado y su término independiente es

Valor numérico de un Polinomio

Es el valor que toma un polinomio al sustituir la variable por un cierto número.

Así, dado el polinomio $P(x) = 2x^2 + 5$, su valor numérico para $x = -1$ es:

$$P(-1) = 2(-1)^2 + 5 = 7$$

Ejemplo:

Vamos a trabajar con el polinomio $P(x) = 2x^5 - 3x^4 + 2x^2 - x - 1$ los puntos anteriores.

$\text{gr}(P(x)) : 5$ (grado del polinomio)

Coeficiente principal: 2

Término independiente: -1

Valor numérico de $P(x)$ para $x = 0$: $P(0) = -1$

Valor numérico de $P(x)$ para $x = 2$: $P(2) = 2 \cdot 2^5 - 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^2 - 2 - 1 = 21$

Si en alguno de los polinomios no existiera un término de un determinado grado, se considera, como ya se ha dicho, que su coeficiente es 0.



Igualdad de Polinomios

Dos polinomios son iguales sí y solo sí tienen el mismo grado y los coeficientes de los términos de igual grado son iguales.

Ejemplo:

Calcular h sabiendo que $P(x) = 2hx + 3$ y $Q(x) = 8x + 3$ son polinomios iguales.

Ambos tienen el mismo grado.

Los coeficientes del término independiente coinciden.

Los coeficientes del término de grado 1 deben coincidir, por lo tanto:

$$2h = 8, \text{ luego para que } P(x) = Q(x), h = 4.$$

Polinomios opuestos

Son aquellos que tienen los términos del mismo grado con signos contrarios, es decir que la suma de dos polinomios opuestos es igual al polinomio nulo. Se simboliza:

$$P(x) = -R(x) \quad \text{ó} \quad -P(x) = R(x)$$

Ejemplo:

$$P(x) = 2x^2 - x + 5$$

$$R(x) = \underline{-2x^2 + x - 5} \quad \text{si sumamos miembro a miembro nos queda:}$$
$$0x^2 + x + 0$$

Operaciones con Polinomios

Suma y resta de Polinomios

La suma o resta de dos polinomios da como resultado un nuevo polinomio obtenido de sumar o restar los términos semejantes (de igual grado). Se verifica por lo tanto la ley de cierre de la suma en el conjunto.

Al sumar términos semejantes, en realidad sumamos los coeficientes con su signo, por lo cual, la suma de polinomios es, en definitiva, suma de números reales. Esta operación, así definida, verifica las propiedades:

- **Asociativa:** $[P(x) + Q(x)] + R(x) = P(x) + [Q(x) + R(x)]$
- **Conmutativa:** $P(x) + Q(x) = Q(x) + P(x)$
- **Existe elemento neutro:** polinomio nulo
- **Cada polinomio tiene su opuesto**

Pregunta:

Al sumar o restar un polinomio de grado 2 con otro de grado 3, ¿de qué grado será la suma? ¿y la resta?



Ejemplo:

Siendo $P(x) = 2x^5 - 3x^2 + 2x - 1$ y $Q(x) = x^4 + 7x^2 + 5x + 2$, será:

$$P(x) + Q(x) = 2x^5 + x^4 + 4x^2 + 7x + 1$$

$$P(x) - Q(x) = 2x^5 - x^4 - 10x^2 - 3x - 3$$

Pregunta:

En general: al sumar o restar dos polinomios de grados distintos, ¿de qué grado será el polinomio resultante?

Producto de Polinomios

Cuando se multiplican dos polinomios, el resultado es otro polinomio cuyo grado es igual a la suma de los grados de los polinomios factores y cuyos términos se obtienen de aplicar la propiedad distributiva entre los términos de $P(x)$ y $Q(x)$.

Simbólicamente:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 x^0$$

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0 x^0$$

Se define el producto $P(x) \cdot Q(x) = a_n \cdot b_m x^{m+n} + \dots + (a_1 \cdot b_0 + a_0 \cdot b_1) x^1 + a_0 b_0 x^0$

Donde $\text{grado}(P(x) \cdot Q(x)) = \text{grado } P(x) + \text{grado } Q(x)$

Ejemplo:

Siendo $P(x) = 3x^4 - 2x$ y $Q(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3$, vamos a calcular $P(x) \cdot Q(x)$.

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= 3x^4 (2x^3 - 2x^2 + 3) - 2x (2x^3 - 2x^2 + 3) = \\ &= 3x^4 \cdot 2x^3 + 3x^4 (-2x^2) + 3x^4 \cdot 3 - 2x \cdot 2x^3 - 2x (-2x^2) - 2x \cdot 3 = \\ &= 3 \cdot 2 x^4 x^3 + 3 (-2) x^4 x^2 + 3 \cdot 3 x^4 - 2 \cdot 2 x x^3 - 2(-2) x x^2 - 2 \cdot 3 x = \\ &= 6x^7 - 6x^6 + 5x^4 + 4x^3 - 6x \end{aligned}$$

Otra forma de hacerlo sería utilizando la disposición vertical:

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 2x^2 + 3 \\ 3x^4 - 2x \\ \hline - 4x^4 + 4x^3 - 6x \\ 6x^7 - 6x^6 + 9x^4 \\ \hline 6x^7 - 6x^6 + 5x^4 + 4x^3 - 6x \end{array}$$



Igual que para la suma, el producto de polinomios verifica las propiedades:

- **Asociativa:** $[P(x) \cdot Q(x)] \cdot R(x) = P(x) \cdot [Q(x) \cdot R(x)]$
- **Conmutativa:** $P(x) \cdot Q(x) = Q(x) \cdot P(x)$
- **Existe elemento neutro:** $P(x) = 1$
- **No existe polinomio inverso:** Es decir, dado un polinomio cualquiera no existe otro que multiplicado por aquél dé 1.

Por último, se verifica la propiedad distributiva del producto respecto de la suma:

$$P(x) [Q(x) + R(x)] = P(x) \cdot Q(x) + P(x) \cdot R(x)$$

Productos notables

Cuadrado de un binomio.

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a \cdot a - a \cdot b - b \cdot a + b \cdot b = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Ejemplo:

$$(2x + 1)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot (2x) \cdot 1 + 1^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

Cubo de un binomio.

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Ejemplo:

$$(x + 2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

Producto de la suma de dos términos por la diferencia de los mismos

$$(a + b)(a - b) = a \cdot a - a \cdot b + b \cdot a - b \cdot b = a^2 - b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Ejemplo:

$$(3x + 1)(3x - 1) = (3x)^2 - 1^2 = 9x^2 - 1$$

Recuerda que las igualdades que acabamos de demostrar tienen una aplicación inmediata en el trabajo con números complejos en su forma binómica.



División de Polinomios

Dado un polinomio $P(x)$ (polinomio dividendo) y otro $D(x) \neq 0$ (polinomio divisor), siempre existen y son únicos otros dos polinomios

$C(x)$ (polinomio cociente) y $R(x)$ (polinomio resto) tal que:

$$P(x) = D(x) \cdot C(x) + R(x) \quad \text{donde: } \text{grado } R(x) < \text{grado } D(x) \text{ ó } R(x) = 0$$

Es decir que si dividimos como con reales la notación simbólica representa esta división:

$\begin{array}{r} P(x) \overline{) D(x)} \\ R(x) \quad C(x) \end{array}$
--

Para dividir polinomios debemos completar el dividendo y ordenar dividendo y divisor según las potencias decrecientes de la variable. Para completar un polinomio se deben agregar los términos que faltan con coeficientes "cero".

Ejemplo:

Dado el polinomio $P(x) = 2x^4 - x + 8$

Completo nos quedaría $P(x) = 2x^4 + 0x^3 + 0x^2 - x + 8$

Una vez que completamos el polinomio y ordenamos las potencias decrecientes de la variable podemos comenzar con la división. Para facilitar la operación, es conveniente proceder de la siguiente manera:

Se divide el primer término del dividendo por el primer término del divisor, obteniéndose el primer término del cociente:

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 0x^3 + 0x^2 - x + 8 \quad \overline{) x + 2} \\ 2x^3 \end{array}$$

Se multiplica este término del cociente por el divisor y se resta este producto del dividendo, obteniéndose un nuevo dividendo:

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 0x^3 + 0x^2 - x + 8 \quad \overline{) x + 2} \\ 2x^4 + 4x^3 \\ \hline -4x^3 + 0x^2 - x + 8 \end{array}$$

$$0 - 4x^3 + 0x^2 - x + 8$$

Se reitera el procedimiento indicado en a) y b) tantas veces como sea necesario hasta que el resto se transforme en el polinomio nulo, o bien, su grado sea menor que del divisor.



$$\begin{array}{r|l} 2x^4 + 0x^3 + 0x^2 - x + 8 & x + 2 \\ 2x^4 + 4x^3 & 2x^3 - 4x^2 + 8x - 17 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 - 4x^3 + 0x^2 - x + 8 \\ - 4x^3 - 8x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 + 8x^2 - x + 8 \\ + 8x^2 + 16x \\ \hline 0 - 17x + 8 \\ - 17x - 34 \\ \hline 0 + 42 \end{array}$$

Luego: $C(x) = 2x^3 - 4x^2 + 8x - 17$ y $R(x) = 42$

Observaciones:

El grado del cociente, es la diferencia entre el grado del dividendo y el del divisor. Es decir $\text{gr}(C(x)) = \text{gr}(P(x)) - \text{gr}(D(x))$

Si al dividir el polinomio $P(x)$ por otro $Q(x)$, el resto es el polinomio nulo ($R(x) = 0$), se dice que el cociente es exacto y que $P(x)$ es divisible por $Q(x)$ o bien que $Q(x)$ es divisor de $P(x)$.

Regla de Ruffini

Cuando el divisor es un polinomio de la forma $x - \alpha$, siendo α un número real, se simplifica el proceso utilizando la regla de Ruffini. Se muestra el proceso con el ejemplo anterior

$$P(x) = 2x^4 - x + 8 \text{ y } Q(x) = x + 2$$

Primero escribimos en una fila los coeficientes del dividendo completo y ordenado, según las potencias decrecientes de la variable:

$$2 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 8$$

Luego se traza una cruz como indica la figura, y en el ángulo izquierdo se escribe el opuesto del término independiente del divisor

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 0 & 0 & -1 & 8 \\ -2 & & & & & \end{array}$$

En la tercer fila se obtienen los coeficientes del cociente, el primero de los cuáles es el primero del dividendo:



$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 0 & 0 & -1 & 8 \\ -2 & \downarrow & & & & \\ & 2 & & & & \end{array}$$

Los restantes coeficientes del cociente se obtienen multiplicando el resultado anterior obtenido por el número que figura en el ángulo izquierdo (que actúa como "pivote") y se lo coloca en la segunda fila en la columna correspondiente. Luego se suma este producto al correspondiente coeficiente de la primera fila (ubicado en la misma columna). El último número así obtenido es el resto.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 0 & 0 & -1 & 8 \\ -2 & & -4 & 8 & -16 & 34 \\ \hline & 2 & -4 & 8 & -17 & 42 \end{array}$$

Diagram illustrating the steps of polynomial division. The first diagram shows the initial setup with the divisor -2 and the dividend coefficients 2, 0, 0, -1, 8. The second diagram shows the first step: multiplying the divisor by the first coefficient (2) to get -4, which is placed in the second row, second column. The third diagram shows the next step: multiplying the divisor by the new coefficient -4 to get 8, which is placed in the second row, third column. The final diagram shows the completed division with the quotient coefficients 2, -4, 8, -17 and the remainder 42.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 0 & 0 & -1 & 8 \\ -2 & & -4 & 8 & -16 & 34 \\ \hline & 2 & -4 & 8 & -17 & 42 \end{array}$$

Diagram illustrating the final step of polynomial division. The quotient coefficients are 2, -4, 8, -17 and the remainder is 42. The remainder 42 is circled and labeled "RESTO".

Como se puede observar, como en estos casos el divisor es de grado uno, el grado del cociente es una unidad menor que el grado del dividendo. El grado del resto, es cero, por tratarse de una constante.

Así nos queda $C(x) = 2x^3 - 4x^2 + 8x - 17$ y Resto = 42

Ejemplo:

Efectuar la división del polinomio $x^3 - 2x^2 - x + 2$ por el binomio $x - 1$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & & 1 & -1 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

Cociente: $x^2 - x - 2$ Resto: 0

Es decir $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 1)(x^2 - x - 2) + 0$

Ejemplo:

Efectuar la división del polinomio $2x^3 + 4x^2 - 3x + 1$ por el binomio $x + 2$



$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & 4 & -3 & 1 \\
-2 & & -4 & 0 & 6 \\
\hline
7 & 2 & 0 & -3 & 7
\end{array}$$

Cociente: $2x^2 - 3$ Resto: 7

Es decir $2x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = (x + 2)(2x^2 - 3) +$

Ejemplo:

Efectuar el cociente anterior utilizando el algoritmo de división.

$$\begin{array}{r}
 2x^3 + 4x^2 - 3x + 1 \\
 \underline{2x^3 + 4x^2} \\
 0 \quad 0 \quad -3x + 1 \\
 \quad \underline{-3x - 6} \\
 \quad \quad 0 \quad 7
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \overline{) x + 2} \\
 2x^2 - 3
 \end{array}$$

Cociente: $2x^2 - 3$ Resto: 7

Teorema del Resto

Hipótesis: Sea el polinomio $P(x)$ y otro polinomio $Q(x)$ de la forma $Q(x) = (x + \alpha)$

Tesis: El resto de la división entre $P(x)$ y $Q(x)$ es igual al valor numérico del polinomio $P(x)$ valorizado en $-\alpha$ es decir $P(-\alpha)$, siendo α un número real.

Demostración:

Sabemos que si $C(x)$ es el cociente de la división de $P(x)$ por $Q(x)$, entonces:

$$P(x) = C(x) \cdot Q(x) + R(x), \quad \text{pero } Q(x) = (x + \alpha)$$

$$\text{reemplazando: } P(x) = C(x) \cdot (x + \alpha) + R(x),$$

Pero para $x = -\alpha$, se tiene:

$$\begin{aligned}
 P(-\alpha) &= \underbrace{C(-\alpha) \cdot (-\alpha + \alpha)}_{= 0} + R(-\alpha) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

es decir :

$$P(-\alpha) = R(-\alpha)$$

Ejemplo:

$$P(x) = x^2 - 2x + 1$$

$$Q(x) = x - 1$$

$$P(1) = 1^2 - 2(1) + 1 = 0 \Rightarrow \text{resto de la división es 0}$$



Raíces de un Polinomio

Un número $\alpha \in \mathbb{R}$ es una raíz o un cero del polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 x^0$ si el valor numérico para $x = \alpha$ es igual a 0.

Es decir, α es raíz de $P(x)$ si $P(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_0 \alpha^0 = 0$

El teorema del resto es una herramienta para reconocer una raíz de un polinomio.

Ejemplo:

Sea $P(x) = x^2 - x - 2$

Si $\alpha = 2$ resulta que $P(2) = 2^2 - 2 - 2 = 0 \Rightarrow 2$ es una raíz del polinomio

Considera $\alpha = -1$. ¿Es este número otra raíz del polinomio?

Considera el polinomio $G(x) = (x - 3)(x + 2)^2(x - 1)^3$

Calcula $G(3)$, $G(-2)$ y $G(1)$. ¿Qué deduces?

¿Cuál es el grado de $G(x)$?

Teorema de "caracterización" de las raíces de un polinomio: Un número α real es raíz de $P(x)$ si y solo si el resto de la división de $P(x)$ por $x - \alpha$ es cero.

Es decir α real es raíz de $P(x) \Leftrightarrow R = 0$

Demostración:

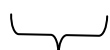
Sabemos que si $C(x)$ es el cociente de la división de $P(x)$ por $Q(x)$, entonces:

$P(x) = C(x) \cdot Q(x) + R(x)$, pero $Q(x) = (x - \alpha)$

reemplazando: $P(x) = C(x) \cdot (x - \alpha) + R(x)$,

Pero para $x = \alpha$, se tiene:

$$P(\alpha) = C(\alpha) \cdot (\alpha - \alpha) + R(\alpha)$$



$$0 = 0 + R(\alpha) \Rightarrow R = 0$$

Otra forma de enunciar el teorema anterior es: "un número α real es raíz de $P(x)$ si y sólo si $P(x)$ es divisible por $x - \alpha$ ".

Es decir: α real es raíz de $P(x) \Leftrightarrow \exists C(x) / P(x) = C(x) \cdot (x - \alpha)$

Nota: el $\text{gr}(C) = \text{gr}(P) - 1$

Ejemplo:

En el caso anterior $P(x)$ es divisible por $x - 1$ pero no es divisible por $x + 1$

Sea $P(x) = x^2 - 9$

Este polinomio es:

divisible por $(x - 3)$ pues: $P(3) = 9 - 9 = 0$

divisible por $(x + 3)$ pues: $P(-3) = 9 - 9 = 0$



Factorización de Polinomios

Recordamos la “descomposición factorial” de un número entero como el producto de potencias de números primos, es decir dado $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 1$, $a \neq -1$, existen y son únicos los números primos $p_1, p_2, \dots, p_r$ y los naturales $n_1, n_2, \dots, n_r$ tales que:

$$a = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_r^{n_r}$$

Esta descomposición factorial de un número entero tiene su análoga para el uso con los polinomios. En este curso veremos solamente los casos más simples pudiéndose presentar algunos casos en que ciertos factores no serán polinomios primos pero cuya descomposición está por afuera de nuestro alcance. Debido a esto diremos que un polinomio de grado positivo ha sido “*factoreado*” o “*factorizado*” si ha sido descompuesto en producto de polinomios de grado positivo, primos o no.

Y diremos que ha sido “*factoreado total*” o “*factorizado total*” si es primo o si ha sido descompuesto en producto de polinomios primos.

Un polinomio es primo cuando no puede expresarse como un producto de polinomios de menor grado.

Teorema de descomposición factorial de polinomios

Todo polinomio de grado n , positivo, admite una única descomposición en factores de la forma $(x - \alpha_i)$, donde α_i es una raíz o cero del polinomio, resultando:

$P(x) = a_n (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n)$, donde a_n es el coeficiente principal de $P(x)$ y $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ son n raíces, no necesariamente distintas.

Si al escribir un polinomio como producto hay más de un factor que tiene la misma raíz, a ésta se la llama raíz múltiple, y a la cantidad de veces con que aparece se la llama “grado de multiplicidad”.

En general:

$P(x) = a_n (x - \alpha_1)^{h_1} \cdot (x - \alpha_2)^{h_2} \cdot \dots \cdot (x - \alpha_r)^{h_r}$, donde a_n es el coeficiente principal de $P(x)$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ son r raíces distintas de $P(x)$, $h_1, h_2, \dots, h_r$ indican las respectivas multiplicidades de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ y $h_1 + h_2 + \dots + h_r = n$

Ejemplo:

$P(x) = 2(x - 1)^2(x^2 - 9)$ es una factorización de un polinomio, pero no es una factorización total pues $x^2 - 9$ no es un polinomio primo.

$P(x) = 2(x - 1)^2(x + 3)(x - 3)$ es una factorización total del polinomio anterior, pues $(x - 1)$, $(x + 3)$ y $(x - 3)$ son polinomios primos (recordar que todos los polinomios de primer grado son primos).



Teorema fundamental del álgebra

Un polinomio de grado n positivo tiene exactamente n raíces, considerando las reales y las complejas.

Una consecuencia de este teorema es que un polinomio de grado n tiene como máximo n raíces reales.

En los polinomios a coeficientes reales, las raíces complejas vienen siempre de a pares de allí que un polinomio a coeficientes reales de grado impar siempre tiene por lo menos una raíz real.

Casos de factorreo

Para factorizar polinomios se aplican diversos recursos algebraicos, agrupados en “casos de factorreo” que se detallan a continuación:

Factor común

Es una aplicación directa de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma o la resta. En realidad es la propiedad distributiva, sólo que presentada “al revés” de lo que habitualmente se hace; es decir:

$a \cdot c + b \cdot c = c(a + b)$ (se extrae el factor común) en lugar de $c(a + b) = a \cdot c + b \cdot c$

Ejemplo:

$$P(x) = 3x^2 + 6x + 15 = 3(x^2 + 2x + 5)$$

$$Q(x) = 10x^5 + 30x^4 - 25x^2 - 5x = 5x(2x^4 + 6x^3 - 5x - 1)$$

Factor común por grupos

Consiste en agrupar los términos del polinomio $P(x)$ dado, de modo que en cada grupo $g_1(x), g_2(x), \dots, g_k(x)$ se pueda aplicar el primer caso de factorreo, con un mismo factor común para cada grupo, es decir, de modo que:

$$g_1(x) = q_1(x) \cdot h(x), \quad g_2(x) = q_2(x) \cdot h(x), \quad \dots, \quad g_k(x) = q_k(x) \cdot h(x)$$

Luego de ello, volviendo a aplicar el primer caso se tendrá:

$$\begin{aligned} P(x) &= g_1(x) + g_2(x) + \dots + g_k(x) = q_1(x) \cdot h(x) + q_2(x) \cdot h(x) + \dots + q_k(x) \cdot h(x) = \\ &= h(x) [q_1(x) + q_2(x) + \dots + q_k(x)] \end{aligned}$$

Ejemplo:

$$P(x) = \underbrace{3x^3 + x^2}_{x^2} + \underbrace{6ax + 2a}_{2a} = x^2(3x + 1) + 2a(3x + 1)$$

aplicando factor común:

$$P(x) = (x^2 + 2a)(3x + 1)$$



Forma factorizada de un polinomio de segundo grado

Un polinomio de segundo grado de la forma $P(x) = a x^2 + b x + c = a (x - x_1) (x - x_2)$ siendo x_1 y x_2 las raíces de $P(x)$ (halladas por la resolvente)

Ejemplo:

$$P(x) = 4 x^2 + 4 x + 1 = 4 (x^2 + x + \frac{1}{4}) = 4 (x + \frac{1}{2})^2 = 4 (x + \frac{1}{2}) (x + \frac{1}{2})$$

Trinomio cuadrado perfecto

Se aplica cuando se tiene un trinomio de grado par, con dos términos que son cuadrados perfectos y un término que es el doble del producto de las bases de los cuadrados perfectos. Su factorización como cuadrado de un binomio es una consecuencia de la igualdad:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2 \quad \text{con } a \in \mathbb{R}$$

Ejemplo:

$$P(x) = x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2 \cdot 2x + 2^2 = (x + 2)^2 \quad \text{cuadrado de un binomio (expresión factorizada del trinomio cuadrado perfecto).}$$

Cuatrinomio cubo perfecto

Análogamente al caso anterior, esta factorización es una consecuencia de la igualdad:

$$(x + a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3, \quad a \in \mathbb{R}$$

Ejemplo:

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x + 2)^3 \quad \text{cubo de un binomio (expresión factorizada del cuatrinomio cubo perfecto).}$$

Diferencia de cuadrados

Se factoriza como producto de la suma por la diferencia de dos monomios, como consecuencia de la igualdad:

$$(x^2 - a^2) = (x + a) \cdot (x - a), \quad a \in \mathbb{R}$$

Ejemplo:

$$x^2 - 3^2 = (x + 3) \cdot (x - 3)$$



Teorema de Gauss

Cuando una fracción irreducible $a = p/q$ es raíz de un polinomio $P(x)$ con coeficientes enteros, p es divisor del término independiente (a^0) y q es divisor del coeficiente principal (a_n).

Si a es raíz de $P(x)$, el resto de la división de $P(x)$ por $(x - a)$ es cero. En consecuencia el polinomio dividendo queda expresado como producto del divisor por el cociente $C(x)$ es decir:

$$P(x) = (x - a) C(x)$$

Ejemplo:

$$P(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 8x - 6$$

Divisores de a_0 : $\{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6\}$

Divisores de a_n : $\{-1, 1\}$

Posibles raíces racionales : $\{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6\}$

$$P(-1) = (-1)^4 - 4(-1)^3 + (-1)^2 + 8(-1) - 6 = 1 + 4 + 1 - 8 - 6 = -8 \neq 0$$

$$P(1) = 1^4 - 4(1)^3 + (1)^2 + 8(1) - 6 = 1 - 4 + 1 + 8 - 6 = 0 \text{ es decir } 1 \text{ es raíz de } P(x)$$

$$\text{Por lo tanto } P(x) = (x - 1) C(x) \quad (1)$$

Para encontrar $C(x)$ aplicamos Ruffini:

1	-4	1	8	-6	Cociente: $x^3 - 3x^2 - 2x + 6$
1	1	-3	-2	6	
1	-3	-2	6	0	

Reemplazando en (1) resulta : $P(x) = (x - 1) (x^3 - 3x^2 - 2x + 6)$

Aplicación

Divisibilidad de la suma o diferencia de potencias de igual grado por la suma o diferencia de las bases

Para $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, se verifican:

$P(x) = x^n \pm a^n$		Divisores
n impar	$x^n + a^n$	$(x + a)$
	$x^n - a^n$	$(x - a)$
n par	$x^n - a^n$	$(x + a) \wedge (x - a)$
	$x^n + a^n$	No tiene divisores de la forma $(x \pm a)$



La aplicación de estos resultados nos permite factorizar binomios que son suma o diferencia de potencias de igual grado.

Ejemplos:

1) $P(x) = x^4 - 16 = x^4 - 2^4$, es divisible por $x + 2$ y por $x - 2$

entonces $x^4 - 16$ se puede factorizar como:

$x^4 - 16 = C(x) \cdot (x + 2)$, donde $C(x)$ es el cociente de la división de $x^4 - 16$ por $x + 2$.

Calculemos entonces $C(x)$, aplicando la *Regla de Ruffini*:

-2	1	0	0	0	-16	
	-2	4	-8	16		
	1	-2	4	-8	0	→ resto

$C(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 8$, es decir :

$P(x) = x^4 - 16 = (x^3 - 2x^2 + 4x - 8) \cdot (x + 2)$

2) $P(x) = x^4 + 81$, no tiene raíces reales

3) $P(x) = x^3 - 27$, es divisible por $(x - 3)$

aplicando Ruffini se obtiene: $P(x) = (x - 3) \cdot (x^2 + 3x + 9)$

Expresiones algebraicas racionales

Así como llamamos números racionales a los números de la forma $\frac{a}{b}$ con a y b enteros

($b \neq 0$), llamaremos expresiones racionales a las expresiones de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios de una sola variable x , siendo $Q(x)$ **no nulo** y de grado distinto de cero.

Ejemplo:

$\frac{3}{x}$ es una expresión racional, porque el numerador $P(x) = 3$ es un polinomio y el denominador $Q(x) = x$ también es un polinomio y además $x \neq 0$



Simplificación de expresiones racionales

Podemos simplificar una expresión racional cuando después de haber factorizado numerador y denominador, figura en ambos un mismo factor (no nulo).

Ejemplo:

Sea $\frac{x^2 - 36}{3x^2 - 18x}$ con $x \neq 0$ y $x \neq 6$ (¿Por qué?)

Si factorizamos numerador y denominador, se tiene:

$$\frac{x^2 - 36}{3x^2 - 18x} = \frac{(x-6)(x+6)}{3x(x-6)}$$

Luego, la expresión simplificada es:

$$\frac{x+6}{3x}$$

Operaciones con expresiones racionales

Las definiciones de suma y producto en este nuevo conjunto son similares a las dadas en

1. Adición
2. Sustracción
3. Multiplicación
4. División

Recordemos que se procede de la misma manera que se hizo con los números reales. A los fines de simplificar la notación consideremos $P(x)$ como P .

Adición

Es conveniente ahora tener presente que:

Para hallar el mínimo común múltiplo de dos o más polinomios, se los factoriza, y se considera luego, el producto de los factores primos comunes y no comunes con su mayor exponente.

Hallar el mínimo común múltiplo (m.c.m) de

$$P(x) = x^2 - 9 ; Q(x) = x^2 + 6x + 9 \text{ y } S(x) = x+3$$



luego: $x^2 - 9 = (x + 3) \cdot (x - 3)$

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

$$x + 3 = x + 3$$

Así el m.c.m. pedido es: $(x - 3) \cdot (x + 3)^2$

Digamos que si llamamos **M** al mínimo común múltiplo de **Q** y **S**, podemos definir:

$$\frac{P}{Q} + \frac{R}{S} = \frac{\frac{M}{Q} \cdot P + \frac{M}{S} \cdot R}{M}$$

Ejemplo:

$$\frac{3}{x-1} + \frac{4x-3}{x^2-x} ; \text{ con } x \neq 0 \text{ y } x \neq -1$$

Como **M** es $x \cdot (x - 1)$, resulta:

$$\frac{3}{x-1} + \frac{4x-3}{x^2-x} = \frac{\frac{x(x-1)}{x-1} \cdot 3 + \frac{x(x-1)}{x^2-x} \cdot (4x-3)}{x(x-1)} = \frac{3x + 4x - 3}{x(x-1)} = \frac{7x-3}{x(x-1)}$$

se factorizan los denominadores → se halla m.c.m y las fracciones equivalentes → se suman numeradores

Sustracción

Definimos opuesta de la expresión racional $\frac{R}{S}$ a $-\frac{R}{S}$

Entonces,

Para restar dos expresiones racionales, a la primera se le suma la opuesta de la segunda. Se simboliza:

$$\frac{P}{Q} - \frac{R}{S} = \frac{P}{Q} + \left(-\frac{R}{S} \right)$$



Multiplicación

Definición:

$$\frac{P}{Q} \cdot \frac{R}{S} = \frac{P \cdot R}{Q \cdot S}$$

Ejemplo:

$$\frac{x^4 - 1}{x^2 + 6x + 9} \cdot \frac{x^2 + 3x}{x^2 - 1} \cdot \frac{1}{x^2 + 1} \text{ con } |x| \neq 1 \text{ y } x \neq -3$$

Factoreamos todos los numeradores, los denominadores y luego, simplificamos:

$$\begin{aligned} \frac{x^4 - 1}{x^2 + 6x + 9} \cdot \frac{x^2 + 3x}{x^2 - 1} \cdot \frac{1}{x^2 + 1} &= \frac{(x+1)(x-1)(x^2+1)}{(x+3)^2} \cdot \frac{x(x+3)}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{1}{x^2+1} = \\ &= \frac{x}{x+3} \end{aligned}$$

División

Definimos la recíproca de $\frac{R}{S}$ como $\frac{S}{R}$ (con $R \neq 0$)

Luego,

$$\frac{P}{Q} : \frac{R}{S} = \frac{P}{Q} \cdot \frac{S}{R} \quad \text{con } Q \text{ y } R \neq 0$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \frac{x-3}{4x} : \frac{x^2-9}{8x+16x^2} &= \frac{x-3}{4x} \cdot \frac{8x+16x^2}{x^2-9} = \frac{x-3}{4x} \cdot \frac{8x(1+2x)}{(x+3)(x-3)} = \\ &= \frac{2(2x+1)}{x+3} \end{aligned}$$



Ejercicios resueltos

1- Dados los siguientes polinomios:

$$T = -3x^2 + 2x - 2$$

$$U = -x + 3$$

$$V = 2x + 3$$

halla

$$W = \frac{(2U^2 - T)V}{T}$$

Solución:

$$U^2 = (-x + 3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

$$2U^2 - T = (2x^2 - 12x + 18) - (-3x^2 + 2x - 2) = 5x^2 - 14x + 20$$

$$\begin{array}{r} (2U^2 - T)V \Rightarrow \quad 5x^2 - 14x + 20 \\ \quad \quad \quad 2x + 3 \\ \hline \quad \quad \quad 15x^2 - 42x + 60 \\ \quad \quad \quad 10x^3 - 28x^2 + 40x \\ \hline \quad \quad \quad 10x^3 - 13x^2 - 2x + 60 \end{array}$$

$$\frac{(2U^2 - T)V}{T} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} 10x^3 - 13x^2 - 2x + 60 \quad \Big| \quad -3x^2 + 2x - 2 \\ - \quad 10x^3 - \frac{20}{3}x^2 + \frac{20}{3}x \quad \quad -\frac{10}{3}x + \frac{19}{9} \\ \hline \quad -\frac{19}{3}x^2 - \frac{26}{3}x + 60 \\ - \quad -\frac{19}{3}x^2 + \frac{38}{9}x - \frac{38}{9} \\ \hline \quad \quad -\frac{116}{9}x + \frac{578}{9} \end{array}$$

Por ser la operación final una división, el resultado deberá poseer un cociente y un resto.

$$C(x) = -\frac{10}{3}x + \frac{19}{9} \quad R(x) = -\frac{116}{9}x + \frac{578}{9}$$



2- Encontrar el valor numérico de la siguiente expresión algebraica para los valores dados:

$$\frac{\frac{1}{5}x^2 - xy}{x + y} - \frac{\sqrt{x^3} \sqrt[3]{y}}{x - y} \quad \text{con:} \quad \begin{aligned} x &= 4 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{5}x^2 - xy}{x + y} - \frac{\sqrt{x^3} \sqrt[3]{y}}{x - y} &= \frac{\frac{1}{5}4^2 - 4(-1)}{4 + (-1)} - \frac{\sqrt{4^3} \sqrt[3]{-1}}{4 - (-1)} = \frac{\frac{16}{5} + 4}{3} - \frac{\sqrt{(2^2)^3}(-1)}{5} = \\ &= \frac{\frac{36}{5}}{3} + \frac{\sqrt{2^6}}{5} = \frac{36}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{8}{5} = 4 \end{aligned}$$

3- Dividir $P(x)$ por $Q(x)$ utilizando la Regla de Ruffini, donde:

$$P(x) = -x^5 + 3x^2 + 6x + 2 \quad Q(x) = x + 3$$

Solución: $\alpha = -3$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -3 & -1 & 0 & 0 & 3 & 6 & 2 \\ & & 3 & -9 & 27 & -90 & 252 \\ \hline & -1 & 3 & -9 & 30 & -84 & 254 \end{array}$$

$$C(x) = -x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 30x - 84$$

$$R(x) = 254$$

4- Desarrollar las siguientes expresiones:

i) $\left(-3u^2v^3w + \frac{1}{2}uw^2\right)^2$

Solución:

$$\left(-3u^2v^3w + \frac{1}{2}uw^2\right)^2 = 9u^4v^6w^2 - 3u^3v^3w^3 + \frac{1}{4}u^2w^4$$

ii) $(2xy - 3x^2y^3)^3$



Solución:

$$\begin{aligned}(2xy - 3x^2y^3)^3 &= 8x^3y^3 - 3 \cdot 4x^2y^2 \cdot 3x^2y^3 + 3 \cdot 2xy \cdot 9x^4y^6 - 27x^6y^9 = \\ &= 8x^3y^3 - 36x^4y^5 + 54x^5y^7 - 27x^6y^9\end{aligned}$$

5- Factorizar los siguientes polinomios:

i) $3x^9y^7 - 12x^7y^9$

Solución:

$$3x^9y^7 - 12x^7y^9 = 3x^7y^7(x^2 - 4y^2) = 3x^7y^7(x - 2y)(x + 2y)$$

ii) $(a - b)^2 - 3(a - b) + 5a(a - b)$

Solución:

$$(a - b)^2 - 3(a - b) + 5a(a - b) = (a - b)[(a - b) - 3 + 5a] = (a - b)(6a - 3 - b)$$

iii) $4a^2b^4 + 9u^6v^2 - 12ab^2u^3v$

Solución:

$$4a^2b^4 + 9u^6v^2 - 12ab^2u^3v = (2ab^2)^2 - 2(2ab^2)(3u^3v) + (3u^3v)^2 = (2ab^2 - 3u^3v)^2$$

iv) $8x^3 - 1$

Solución:

$$\begin{aligned}8x^3 - 1 &= 8\left(x^3 - \frac{1}{8}\right) = 8\left[x^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3\right] = 8\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) = \\ &= (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)\end{aligned}$$

Recordar que: $x^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3$ admite por divisor a $Q(x) = x - \frac{1}{2}$

Realizando el pertinente cociente por Ruffini, obtenemos que:

$$x^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)$$

6- Operar y simplifica

i) $\frac{2ay - na^2}{(x + a)^2} \cdot \frac{ax + a^2}{2y - na}$

Solución:

$$\frac{2ay - na^2}{(x + a)^2} \cdot \frac{ax + a^2}{2y - na} = \frac{a(2y - na)}{(x + a)^2} \cdot \frac{a(x + a)}{(2y - na)} = \frac{a^2}{x + a}$$



$$\text{ii) } \frac{a^4 - 16}{ax - 2x + ay - 2y} \div \frac{a^2 + 4}{2(x + y)}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{a^4 - 16}{ax - 2x + ay - 2y} \div \frac{a^2 + 4}{2(x + y)} &= \frac{(a^2 + 2^2)(a - 2)(a + 2)}{x(a - 2) + y(a - 2)} \cdot \frac{2(x + y)}{a^2 + 4} = \\ &= \frac{(a - 2)(a + 2)}{(a - 2)(x + y)} \cdot 2(x + y) = 2(a + 2) \end{aligned}$$

$$\text{iii) } \frac{x + 1}{x} - \frac{2x - 1}{x^2 - x} + \frac{4 + 3x}{2x - 2}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{x + 1}{x} - \frac{2x - 1}{x^2 - x} + \frac{4 + 3x}{2x - 2} &= \frac{x + 1}{x} - \frac{2x - 1}{x(x - 1)} + \frac{4 + 3x}{2(x - 1)} = \\ &= \frac{2(x - 1)(x + 1) - 2(2x - 1) + x(4 + 3x)}{2x(x - 1)} = \frac{2x^2 - 2 - 4x + 2 + 4x + 3x^2}{2x(x - 1)} = \frac{5x^2}{2x(x - 1)} = \frac{5x}{2(x - 1)} \end{aligned}$$

7- Hallar m y n tal que se verifique las siguientes igualdades:

$$\text{i) } (m - 3) - 6x + (2n + 12)x^2 = 6 + 2m + (m + n)x + (n + 15)x^2$$

Solución:

$$(m - 3) - 6x + (2n + 12)x^2 = 6 + 2m + (m + n)x + (n + 15)x^2 \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2n + 12 = n + 15 \Rightarrow n = 3 \\ -6 = m + n \Rightarrow -9 + 3 = -6 \\ m - 3 = 6 + 2m \Rightarrow m = -9 \end{array} \right.$$

$$\text{ii) } \frac{m}{x^2 - 9} - \frac{n}{2x - 6} = \frac{4x + 13}{2(x - 3)(x + 3)}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{m}{x^2 - 9} - \frac{n}{2x - 6} &= \frac{m}{(x - 3)(x + 3)} - \frac{n}{2(x - 3)} = \frac{2m - n(x + 3)}{2(x - 3)(x + 3)} = \\ &= \frac{(2m - 3n) - nx}{2(x - 3)(x + 3)} = \frac{4x + 13}{2(x - 3)(x + 3)} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2m - 3n = 13 \Rightarrow m = \frac{1}{2} \\ -n = 4 \Rightarrow n = -4 \end{array} \right.$$



8- Calcular directamente el resto en el siguiente cociente:

$$(5x^2 - 6x^3 + 2) \div (x + 2)$$

Solución:

$$\alpha = -2$$

$$R = P(\alpha) = P(-2) = 5(-2)^2 - 6(-2)^3 + 2 = 70$$

9- Determinar a tal que los siguientes cocientes sean exactos:

i) $(-6ax^2 + 2x + 5) \div (2x - 1)$

Solución:

$$\begin{array}{r} -6ax^2 + 2x + 5 \quad | \quad 2x - 1 \\ -6ax^2 + 3ax \quad | \quad -3ax + \left(1 - \frac{3}{2}a\right) \\ \hline (2 - 3a)x + 5 \\ - (2 - 3a)x + \left(\frac{3}{2}a - 1\right) \\ \hline 6 - \frac{3}{2}a \end{array}$$

$$R = 0 \Rightarrow 6 - \frac{3}{2}a = 0 \Rightarrow a = 4$$

ii) $(5x^3 + 2ax - 3) \div (x + 3)$

Solución:

$$\alpha = -3$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 5 & 0 & 2a & -3 \\ -3 & & -15 & 45 & -135 - 6a \\ \hline & 5 & -15 & 45 + 2a & -138 - 6a \end{array}$$

$$R = 0 \Rightarrow -138 - 6a = 0 \Rightarrow a = -23$$

iii) $(3x^4 - 2x^2 - 3ax - 1) \div (x - 2)$

Solución:

$$R = P(\alpha) = P(2) = 3 \cdot 2^4 - 2 \cdot 2^2 - 3a \cdot 2 - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{13}{2}$$

10- Determinar b tal que el resto del siguiente cociente sea igual a 2:

$$(3x^3 + 2bx^2 - x - b) \div (x + 1)$$



Solución:

$$R = P(\alpha) = P(-1) = 3 \cdot (-1)^4 + 2b(-1)^2 - (-1) - b = 2 \Rightarrow b = 4$$

11- Dado $P(x)$, obtener k , sabiendo que $\alpha = -2$ es raíz de $P(x)$:

$$P(x) = 2x^4 - 3x^3 + kx^2 - \frac{5}{2}x + 6$$

Solución:

$$P(\alpha) = P(-2) = 0 \Rightarrow P(-2) = 2(-2)^4 - 3(-2)^3 + k(-2)^2 - \frac{5}{2}(-2) + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$32 + 24 + 4k + 5 + 6 = 0 \Rightarrow k = -\frac{67}{4}$$

12- En una división de $P(x)$ por $Q(x)$ se obtiene el siguiente cociente $C(x)$ y resto $R(x)$:

$$C(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x + \frac{7}{8}$$

$$R(x) = -\frac{29}{8}$$

$$\text{si: } Q(x) = -2x + 3$$

halla $P(x)$

$$\text{Solución: } P(x) = Q(x)C(x) + R(x)$$

$$Q(x)C(x) = -3x^3 + 5x + \frac{21}{8}$$

$$P(x) = Q(x)C(x) + R(x) = -3x^3 + 5x - 1$$



Ejercicios propuestos

1- Dados los siguientes polinomios.

$$A = -6x^3 + 9x^2$$

$$B = 2x - 3$$

$$C = 2x + 5$$

Halla

$$\left[\frac{A}{B} * 2C \right] + 3B$$

2- Encontrar el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para los valores dados:

$$\text{i) } \frac{2a^2 - 2b^6}{b^3} \div (9a^4 + b^9)^2 \quad \text{con } a = (\sqrt{3})^{-1}$$

$$b = \sqrt[3]{2}$$

$$\text{ii) } \frac{(5p - 3q)^3 \left(-2p + \frac{3}{2}q \right)^2}{pq} \quad \text{con } p = 8$$

$$q = \frac{38}{3}$$

3 - Dividir $P(x)$ por $Q(x)$ utilizando la Regla de Ruffini, donde:

$$\text{i) } P(x) = 2 - 3x + 5x^2 + x^3$$

$$Q(x) = x + 2$$

$$\text{ii) } P(x) = 3x^4 + 2x^2 - x + 1$$

$$Q(x) = x - 1$$

$$\text{iii) } P(x) = -3x^5 - 2\sqrt{3}x^4 + x^3 + x - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$Q(x) = x - (\sqrt{3})^{-1}$$

4 - Desarrollar las siguientes expresiones:

$$\text{i) } (-3x + 2y^2)^2$$

$$\text{ii) } \left(-\frac{4}{3}p^2 - \sqrt{3}q \right)^3$$

5 - Factorizar los siguientes polinomios.

$$\text{i) } x^2 + ax + x + ax^2$$

$$\text{ii) } 4x^3 + 4x^2 - x - 1$$



iii) $4(p - 2)^4 - (p - 2)^2$

iv) $64 a^3 b^3 + 8$

v) $\frac{1}{5}a^4 - \frac{2}{5}a^3b + \frac{1}{5}a^2b^2 - \frac{1}{5}a^3 + \frac{2}{5}a^2b - \frac{1}{5}ab^2$

6 - Opera, simplifica e indica los valores para los cuales la expresión carece de sentido :

i) $\frac{6t^2 + 6t + 3t^4 - 3t^3}{t^3 + t^2 - 2t - 2}$

ii) $\frac{(a^2 - 1)}{(3a - 8)(a + 1)} \cdot \frac{(9a^2 - 64)}{(a - 1)}$

iii) $\left(\frac{2x+5}{2x+4} - \frac{x}{x+2}\right) \div \left(\frac{2x-5}{2x-4} - \frac{x}{x-2}\right)$

iv) $\left(\frac{1}{y} + \frac{2}{1-y} + \frac{1}{1+y} - \frac{3}{1-y^2}\right) \div \left(\frac{1}{y+y^2}\right)$

v) $\left[\frac{2x^2+1}{3x^2} - \frac{2x+1}{4x^2-1} \cdot \frac{4x^2-4x+1}{3x}\right] \div \frac{x^2+2x+1}{9x^3}$

vi) $\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{2x}{y} + 1\right] \div \frac{3x^2 - 6xy + 3y^2}{y^4}$

vii) $\sqrt{\frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x+1}}$

7 - Hallar p y q tal que se verifiquen las siguientes igualdades:

i) $5x^2 + 2qx^2 - 3x + 5 + p = -2x^2 - qx^2 - 3x - 4 + q$

ii) $\left(\frac{1}{2}q - 3p + 2\right)x^3 = -4qx + 2qx^2 + 5px^3$

iii) $\frac{p}{x-2} + \frac{q}{2x} = \frac{3}{x^2-2x}$

iv) $\frac{4q}{3(x-5)} - \frac{5p}{x+5} = \frac{2x-1}{x^2-25}$



8 - Calcular directamente el resto en el siguiente cociente:

i) $\frac{2y^3 - 3y^2 + y - 3}{y - 3}$

ii) $\frac{5y^4 + y^2 + 3}{y + 1}$

9 - Determinar **a** tal que los siguientes cocientes sean exactos:

i) Utilizar el algoritmo de la división:

$$(3x^2 + 2ax - 1) : (-3x + 2)$$

ii) Utilizar la regla de Ruffini:

$$(5x^3 + x^2 - 3ax + 2) : (x + 1)$$

iii) Utilizar el teorema del resto:

$$(3x^4 - 4ax^3 + x^2 - 1) : (x - 2)$$

10 - Determinar **b** tal que el resto de los siguientes cocientes sea igual a:

i) $(5x^2 - 2bx + b) : (x + 3)$ resto = -4

ii) $(4x^3 - 3b^2 x^2 + 3) : (x - 1)$ resto = 2

iii) $(x^3 - x^2 + bx - 1) : (3x - 2)$ resto = -1

11- Dado $P(x)$, obtener **k**, sabiendo que **a** es raíz de $P(x)$:

i) $P(x) = -3x^3 + x^2 - 2kx + 3$ **a** = 2

ii) $P(x) = kx^2 - 3x - 2k$ **a** = 1

12 - En las siguientes divisiones $P(x)$ por $Q(x)$ se obtienen los respectivos cocientes $C(x)$ y restos $R(x)$. Si se conoce $Q(x)$, hallar $P(x)$:

i) $C(x) = -x + 4$ $R(x) = 3x - 10$ $Q(x) = -x^2 + 2$

ii) $C(x) = x^2 + 5$ $R(x) = 9$ $Q(x) = x^2 - 2$



13.- ¿Para qué valor/es de x se verifican las siguientes igualdades?

a)
$$\frac{x}{x^2 + 10x + 25} - \frac{3}{x^2 - 25} = \frac{1}{x + 5}$$

b)
$$\frac{x^2 + (x - 5)(3 + 2x)}{x^2 - 4} = \frac{x - 2}{x + 2} + \frac{2x + 4}{x - 2}$$

c) Indique el o los valores de x para los cuales carecen de sentido las igualdades a) y b)

14.- a) Para qué valores de A , B y C se verifica la igualdad:
$$\frac{x^2 + x + 1}{x^3 + x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

b) ¿Para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ carece de sentido la igualdad del punto a)?



Respuestas

1 - $-12x^3 - 30x^2 + 6x - 9$

2 - i) $-\frac{11}{243}$ ii) $\frac{27}{38}$

3 - i) $C(x) = x^2 + 3x - 9$

$R(x) = 20$

ii) $C(x) = 3x^3 + 3x^2 + 5x + 4$

$R(x) = 5$

iii) $C(x) = -3x^4 - 3\sqrt{3}x^3 - 2x^2 - \frac{2}{3}\sqrt{3}x + \frac{1}{3}$

$R(x) = -\frac{2}{9}\sqrt{3}$

4 - i) $9x^2 - 12xy^2 + 4y^4$

ii) $-\frac{64}{27}p^6 - \frac{16}{3}\sqrt{3}p^4q - 12p^2q^2 - 3\sqrt{3}q^3$

5 - i) $x(x + 1)(a + 1)$

ii) $(2x + 1)(2x - 1)(x + 1)$

iii) $(p - 2)^2(2p - 5)(2p - 3)$

iv) $8(2ab + 1)(4a^2b^2 - 2ab + 1)$

v) $\frac{1}{5}a(a - 1)(a - b)^2$

6 - i) $-3t$

ii) $3a + 8$

iii) $\frac{2-x}{2+x}$

iv) $\frac{1}{1-y}$

v) $3x / x + 1$

vi) y^2

vii) $x - 2$

7 - i) $p = -\frac{34}{3}$

$q = -\frac{7}{3}$

ii) $p = \frac{1}{4}$

$q = 0$

iii) $p = \frac{3}{2}$

$q = -3$

iv) $p = -11/50$

$q = 27/40$

8 - i) 27

ii) 9

9 - i) $a = -1/4$

ii) $a = 2/3$

iii) $a = 51/32$

10 - i) $b = -7$

ii) $b = \pm \frac{\sqrt{15}}{3}$

iii) $b = 2/9$

11 - i) $k = -17/4$

ii) $k = -3$



12 - i) $P(x) = x^3 - 4x^2 + x - 2$ ii) $P(x) = x^4 + 3x^2 - 1$

13.- a) $x = 5/4$

 b) $x = -27/11$

 c) a) $x \neq 5 \wedge x \neq -5$ b) $x \neq 2 \wedge x \neq -2$

14.- a) $A = 1$ $B = 0$ $C = 1$

 b) $x \neq 0$



Trabajo Práctico

1- Resuelve estos productos especiales.

a) $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$

b) $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$

2- ¿Para qué valores de k y h los polinomios son iguales?

$$P(x) = (x^3 - kx + 1) \cdot (2x^2 - h)$$

$$Q(x) = 2x^5 - 7x^3 + 2x^2 + 6x - 3$$

3- Halla las raíces reales de:

a) $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 5x - 2$

b) $P(x) = x^5 - 5x^3 + 6x$

c) $P(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$

6- ¿Para qué valores de h el polinomio P(x) es divisible por $x + 2$?

$$P(x) = x^4 - 3x^3 + hx^2 - x + 1$$

7- Factorizar

a) $2x^2 - 3xy$

h) $m^4 + m^2 - 2$

b) $4x + 8y + 12z$

i) $x^2 + 2x - 8$

c) $4a^{n+1} - 8a^{2n}$

j) $a^6 - b^6$

d) $1 - x^8$

k) $3ax - ay - 3bx + by$

e) $32a^4b - 162b^5$

l) $z^3 - 18z^2 + 81z$

f) $x^2 + 8x + 16$

m) $y^3 + 64$

g) $2x^3y^3 + 16x^2y^4 + 32xy^5$

n) $3x^4 - 12$

8- Reduce a la mínima expresión.

a) $\frac{\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 7x - 8}}{\frac{9 - x^2}{64 - x^2}}$

b) $\frac{a}{a - b + \frac{a + b}{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}}}$

c) $\frac{2 + \frac{1}{x}}{2x^2 + x}$

d) $\frac{\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}}{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}}$

11- Reducir a la expresión más simple

a) $\frac{a^2(a - b) + ab(a - b)}{a^2(a^2 - b^2)}$

b) $\frac{a^2 - 2ab + b^2 - x^2}{2(a - b - x)}$