Ministerio de Educación
Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Rosario

SECRETARÍA ACADÉMICA

AREA INGRESO

Matemática

ECUACIONES

Ecuación lineal y ecuación cuadrática

- Setiembre de 2010 -

SECRETARÍA ACADÉMICA

AREA INGRESO

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

Facultad Regional Rosario

Zeballos 1341

2000 – Rosario - Argentina

www.frro.utn.edu.ar

e-mail: ingreso@frro.utn.edu.ar , rvoget@frro.utn.edu.ar

El objetivo de este Curso de Matemática es reafirmar y profundizar los conocimientos adquiridos hasta hoy. Se pretende generar un ámbito de información y de formación en el cual el aspirante a ingreso alcance los conocimientos y habilidades que le permitan el abordaje de las asignaturas del primer nivel de la carrera.

Elaboración del Material

Esp. Ing. Raquel Voget

ECUACIONES

En el material referido a Número Real, se marcó la necesidad de que ejercites el manejo del lenguaje simbólico, para comprender los signos que utilizarán los docentes, y para abordar la bibliografía que te indiquen.

También se mencionó que**:**

- **No podemos designar a dos objetos diferentes con un mismo símbolo**. Si "h" es la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, no llamaremos "h" a la medida de la altura,
- Muchas veces la relación de los signos sugiere la relación de los objetos, por ello generalmente utilizaremos letras del principio del alfabeto **(a, b, c,…) para las cantidades dadas o constantes**, y letras del final **(…, w, x, y, z) para cantidades desconocidas o variables.**
- Para que los símbolos que utilizamos sean fáciles de recordar y de interpretar, muchas veces empleamos *iniciales*. Por ejemplo: "V" para volumen, "t" para tiempo, "d" para distancia, "r" para radio, etc. El problema lo tendremos, en este caso, si se repiten las iniciales, como es el caso de tiempo y temperatura.

Algunos ejemplos de cómo expresar en lenguaje simbólico algunas expresiones:

- $\underbrace{\text{Un número real}}_{x}\text{, más } \underbrace{\text{el doble de otro número real}}_{2\,y}\text{:}$

  $x \;\mathbf{+}\; 2\,y$

- $\underbrace{\text{El cuadrado de un número real}}_{x^2}\text{ más } \underbrace{\text{el triple del mismo número}}_{3\,x}\text{ menos } \underbrace{\text{8 unidades}}_{8}\text{:}$

  $x^2 + 3\,x - 8$

A la primera de ellas la llamamos *una* ***expresión lineal***, y a la segunda ***expresión cuadrática***. Cada expresión tendrá un valor numérico según el valor que le asignemos a **x** y a **y**.

Cuando a la expresión le imponemos una ***condición***, queda planteada una ***ecuación***.

Por ejemplo:

La suma de las edades desconocidas de padre e hijo se puede expresar como x + y, siempre que sepamos qué representamos con "x" y qué representamos con "y". Si a las edades le imponemos la condición de que su suma sea 80, queda planteada la ecuación $x + y = 80$.

Para facilitar el significado de los signos, podríamos llamar "p" a la edad del padre y "h" a la edad del hijo, quedando: $p + h = 80$.
Como advertirás, el planteo de la ecuación aparece como una traducción del lenguaje común al lenguaje de los signos matemáticos. Un lenguaje perfectamente adaptado a su propósito, conciso y preciso, con reglas que no sufren excepciones.
Una ecuación es, en lenguaje matemático, una condición que tienen que cumplir las incógnitas (o variables).

- Traduzcamos al lenguaje matemático las siguientes situaciones:

a) Tres números naturales consecutivos suman 63.
Separemos la frase, subrayando para comprenderla mejor.

Tres números naturales consecutivos	**suman 63**
Números desconocidos	Condición

Si llamamos con "**n**" a un número natural cualquiera, sus consecutivos serán: **n+1** y **n+2.**
La condición es que su suma sea 63, por lo tanto, la traducción es:

$$\mathbf{n + (n + 1) + (n + 2) = 63}$$

b) Dos ángulos difieren en 20º

Dos ángulos	**difieren en 20º**
Desconocidos	Condición

$$\mathbf{x_1 - x_2 = 20}$$

Donde x_1 y x_2 son las medidas de los ángulos en grados.

c) El perímetro de un rectángulo es de 88 m.

El perímetro de un rectángulo	**es de 88 m**

$$\mathbf{2\,(b + h) \quad = \quad 88}$$

Donde b y h son respectivamente base y altura del rectángulo, medidos en metros.

I - Ejercitación (No olvides: consúltanos ante cualquier duda)

Traduce al lenguaje matemático las siguientes situaciones:

a) El doble de un número, sumado a otro número aumentado en 5 unidades, da como resultado 40.
b) Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.
c) La base mayor y la base menor de un trapecio isósceles se diferencian en 5 m.

Ecuación lineal

Una ecuación lineal en ***n*** variables es una ecuación de la forma:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n = b$$

Donde:
$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a_i} \text{ con } i = 1,2,3,\dots,n \text{ son los coeficientes} \\ \mathbf{x_i} \text{ con } i = 1,2,3,\dots,n \text{ son las incógnitas o variables} \\ \mathbf{b} \text{ es el término independiente o término constante} \end{array} \right.$

Por ejemplo:

La ecuación: $f = \frac{9}{5}c + 32$, es una ecuación lineal en dos variables, ya que podemos

escribirla: $f - \frac{9}{5}c = 32$ (Hemos sumado $-\frac{9}{5}c$ a ambos miembros de la ecuación original)

Las variables son f y c, los coeficientes son, respectivamente, 1 y $-\frac{9}{5}$, y el término independiente es 32.

II - Ejercitación propuesta

Investiga, en cada caso, si la ecuación es o no lineal, y en caso afirmativo indica las variables, los coeficientes, respectivos, y el término independiente.

a) $x + y - 2 = - y + 3$

b) $y - 3x + 2y = 3y + x - 2$

c) $6x - xy + 8 = 0$

d) $2x - 2y - x = x + y - 3y + 4$

Resolución de ecuaciones lineales

Resolver una ecuación es hallar los valores desconocidos (incógnitas o variables) que satisfacen la condición planteada.

La **solución general** de la ecuación $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n = b$, es el conjunto de todas las **n-uplas** $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ que hacen que la igualdad sea verdadera. Es decir:

$$S_g = \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \,/\, a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n = b\}$$

Nota que cada solución es una **sucesión** de números. El orden se corresponde con el que aparecen las incógnitas en la ecuación.

La ecuación $f - \frac{9}{5}c = 32$, vista anteriormente, nos permite la conversión normal de grados Celsius (c) a grados Fahrenheit (f). Si elegimos c= 10, resulta f = 50. Una solución de esa ecuación es, entonces, el par (50, 10), en correspondencia con el orden en que aparecen las variables en la ecuación.

Una solución de la ecuación lineal en dos variables 2 x + 3 y = 8, se puede obtener dando un valor a **x** y obteniendo el correspondiente valor de **y**. Por ejemplo, si fijamos x = 1, resulta $y = \frac{8-2x}{3} = \frac{8-2}{3} = \frac{6}{3} = 2$.

La solución general es: $S_g = \{(x, \frac{8-2x}{3}) \,/\, x \in R\}$

Nota que la solución general es un conjunto infinito. **Cada solución es un par ordenado de números reales.**

III - Ejercitación propuesta

a) Encuentra el conjunto solución de las siguientes ecuaciones lineales en dos variables:

i) 2 x – 3 y = 4

ii) 4 x – 6 y = 8

iii) x + y = 0

iv) 2 x = y

v) 3 y = x – 2

vi) 5 x = 1

b) Da una solución particular de cada ecuación del ítem a).

c) Si comparas el conjunto solución de las ecuaciones i) y ii) del ítem a): qué observas? puedes explicar el por qué?

d) ¿Qué valor tendremos que darle a k, para que el par (3, -2) sea solución de k x + y=10?

e) Encuentra los tres números naturales consecutivos que suman 63.

f) En un triángulo rectángulo, uno de sus ángulos agudos mide las dos quintas partes del otro. Encuentra las medidas de los ángulos del triángulo.

g) La diferencia entre la base y la altura de un rectángulo es de 4 m. Si la base es el triple de la altura, cuál es el perímetro del rectángulo?

h) Un cuadrado y un rectángulo tienen el mismo perímetro: 84 m. Si la altura del rectángulo mide la mitad de su base, cuál es la diferencia entre las superficies de las dos figuras?

Ecuación de segundo grado con una incógnita (Cuadrática)

Una ecuación de segundo grado con una incógnita es de la forma:

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0,$$

Donde: a, b y c son los coeficientes,

$a\,x^2$ con a ≠ 0, es el término de segundo grado, o término cuadrático

b x es el término lineal

c es el término independiente.

$a\,x^2$ es el término principal, y a el coeficiente principal.

Supongamos tener el siguiente problema:

Queremos hallar las dimensiones de un terreno que sea rectangular, que tenga un área de 150 m^2, y un perímetro de 50 m.

Primero traduciremos el problema al lenguaje matemático:

Queremos hallar las dimensiones de un terreno que sea rectangular, que tenga un área de 150 m^2, pero su perímetro debe ser de 50 m.

Nuestras incógnitas son las dimensiones de un terreno rectangular, es decir **b** y **h.**

El área debe ser de 150 m^2, por lo tanto **b . h = 150 (*)**

El perímetro debe ser de 50 m, por lo tanto **2 (b + h) = 50**, o bien **b= 25 – h (**)**

La altura medirá h, y la base 25 – h.

Sustituyendo (**) en (*), $(25 - h) \cdot h = 150$

h debe ser tal que $25\,h - h^2 = 150$

La ecuación obtenida es la condición que debe satisfacer h. Esta ecuación es de segundo grado, ya que podemos escribirla: $-h^2 + 25\,h - 150 = 0$.

Los coeficientes son: a = -1, b = 25 y c= -150.

Resolución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita

Resolver una ecuación de segundo grado con una incógnita es hallar los valores de ésta que la satisfagan.

Resolver $-h^2 + 25\,h - 150 = 0$, es hallar los valores de h que la satisfagan.

Analiza cuidadosamente, los pasos para resolver **$a\,x^2 + b\,x + c = 0$**, **$a \neq 0$**, y escribe al costado **qué operación se efectuó en cada uno de ellos.**

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right)^2$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Obtenemos $\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$, llamada **resolvente.**

Observa que la ecuación de segundo grado tiene dos soluciones.

Resolveremos ahora el problema que trata de hallar las dimensiones del terreno rectangular, cuyo planteo nos condujo a la ecuación: $-h^2 + 25h - 150 = 0$

En nuestro caso a=- 1, b= 25 y c = -150. Reemplazando en la *resolvente*, obtenemos:

$$h_{1,2} = \frac{-25 \pm \sqrt{25^2 - 4(-1)(-150)}}{2(-1)} = \frac{-25 \pm \sqrt{625 - 600}}{-2} = \frac{-25 \pm \sqrt{25}}{-2} = \frac{-25 \pm 5}{-2}$$

Resultan dos valores para h: $h_1 = \frac{-25+5}{-2} = 10$

$h_2 = \frac{-25-5}{-2} = 15$

Cuál es el significado de esta solución?

Si tomamos h= 10, resulta b = 25 – 10 = 15

Si tomamos h= 15, b será 25 – 15 = 10

El terreno rectangular será, entonces, de 10 x 15.

Verificación:

Las condiciones del problema eran: Área de 150 m^2, 10 x 15 = 150 √

Perímetro de 50 m, 2 (10 + 15) = 50 √

Casos particulares:

b = 0

Si b = 0, la ecuación es: $\mathbf{a\,x^2 + c = 0}$, y para resolverla sólo tendremos que "despejar" x.

$$2x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad \text{y} \quad x_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$$

c= 0

Si c = 0, la ecuación es: $\mathbf{a\,x^2 + b\,x = 0}$, y para resolverla sólo tendremos que factorizar.

$2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow 2x(x - 2) = 0$

Un producto es cero cuando uno de los factores es cero, por lo tanto los valores de x que satisfacen la ecuación son 0 y 2.

Volvamos a la resolvente:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

La expresión **b^2 – 4 a c,** que figura como radicando, es llamada **discriminante**.

Puede ocurrir que **b^2 – 4 a c** resulte un número positivo, un número negativo, o bien cero.

Depende entonces del discriminante que las soluciones sean:

Números reales distintos (**$b^2 - 4ac > 0$**)

Números reales iguales (**$b^2 - 4ac = 0$**)

Números complejos conjugados (**$b^2 - 4ac < 0$**)

Ejemplos

Se trata de encontrar x/

i) (x + 1) (x – 2) =0

En este caso es fácil ver que las soluciones son -1 y 2

ii) $2x^2 + 6x + 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4.2.1}}{2.2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-8}}{4} = \frac{-6 \pm \sqrt{28}}{4} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{7}}{4} = \frac{-3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} \quad \text{y} \qquad x_2 = -\frac{-3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}$$

iii) $x^2 + 6x + 15 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4.1.15}}{2.1} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-60}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-24}}{2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{-6}}{2} = -3 \pm \sqrt{6}i$$

$$x_1 = -3 + \sqrt{6}\, i \quad \text{y} \qquad x_2 = -3 - \sqrt{6}\, i$$

iv) $x^2 + 6x + 9 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4.1.9}}{2.1} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-36}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$x_1 = x_2 = -3$$

v) Tratemos de encontrar dos números naturales consecutivos cuyo producto sea 156.

n (n+1) = 156

$n^2 + n = 156$

$n^2 + n - 156 = 0$

$$n_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.(-156)}}{2.1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+624}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{625}}{2} = \frac{-1 \pm 25}{2}$$

Resulta $n_1 = 12 \quad y \quad n_2 = -13$

Descartamos $n_2 = -13$, ya que no es un número natural.

La solución de nuestro problema es: 12 y 13.

Analiza la solución si el problema hubiese sido:

"Tratemos de encontrar dos números cuyo producto sea 156"

IV - Ejercitación propuesta

a) Encuentra k tal que la ecuación $2x^2 - x + k = 0$ tenga dos soluciones reales distintas.

b) Resuelve las siguientes ecuaciones:

i) $3x^2 + 5x - 12 = 0$

ii) $x^2 - 2x + 10 = 0$

c) Halla dos números naturales consecutivos cuyo producto sea 756

d) El perímetro de un terreno rectangular es de 300 m, la base tiene 30 m más que la altura. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?

Respuestas a la ejercitación propuesta

I –

a) 2x+y+5=40

b) $\alpha + \beta = 90$ ó $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, en el primer caso trabajamos en el sistema sexagesimal (los ángulos resultarán en grados) y en el segundo caso en el sistema radial (los ángulos resultarán en radianes).

c) B – b = 5

II –

Sólo c) no es lineal.

III –

a)

i) $S_g = \{(x, \frac{4-2x}{-3}) / x \in R\}$

ii) $S_g = \{(x, \frac{8-4x}{-6}) / x \in R\}$

iii) $S_g = \{(x, -x) / x \in R\}$

iv) $S_g = \{(x, 2x) / x \in R\}$

v) $S_g = \{(x, \frac{x-2}{3}) / x \in R\}$

vi) $S_g = \{(\frac{1}{5}, k) / k \in R\}$

d) k = 4

e) 20, 21, 22

f) 64º 17´8” y su complementario

g) 16 m

h) 49 m^2

IV –

a) $k < \frac{1}{8}$

b) i) $x_1 = \frac{4}{3}$ y $x_2 = -3$

ii) $x_1 = 1 - 3i$ y $x_2 = 1 + 3i$

c) 27 y 28

d) El terreno es de 60 m por 90 m.

MISCELANEA PARA AUTOEVALUACION

1) Encuentra el conjunto solución de cada ecuación lineal en dos variables:

a) $2x - y = 3 + x$

b) $6y = -17$

c) $8y - x = 6y + 46$

2) Encuentra dos números naturales consecutivos sabiendo que la suma de sus cuadrados da 313.

3) Si las longitudes de cada lado de un triángulo están dadas por: $2x + 1$, $5 - x$, $3x + 2$, y su perímetro es de 12 m, cuánto mide cada uno de ellos?

4) La suma de las edades de padre e hijo es de 80 años. Si la edad del padre es el triple de la edad del hijo, qué edad tiene cada uno?

5) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + 4x = 5$

b) $x^2 + 49 = 14x$

6) En un rectángulo la base excede a la altura en 5 m. Si su área es de 234 m^2, cúanto mide cada lado?

7) ¿Existe k, de modo que la ecuación $x^2 + kx - 1 = 0$ tenga dos raíces reales iguales?

8) ¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta:

a) La ecuación $3x + 4y = 0$ tiene dos soluciones.

b) La solución de $x^2 - 9 = 0$ es $x = 3$