Curso de Postgrado de Actualización

Modelado y Control de Procesos

Enfoque desde la teoría de sistemas dinámicos y sistemas de control en variables de estado

Vicente Costanza

tsinoli@ceride.gov.ar

Centro de Aplicaciones Informáticas en el Modelado de Ingeniería (CAIMI)

UTN - Facultad Regional Rosario

2008

Bibliografía

- Bryson, A.E.: Applied Linear Optimal Control. Cambridge U. Press; 2002.
- Faurre, P.; Depeyrot, M: Elements of System Theory. North-Holland; 1977.
- Hirsch, M.W.; Smale, S.: Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra. Acadmic Press; 1974.
- Kailath, T.: Linear Systems. Prentice-Hall; 1980.
- Kalman, R.E.; Falb, P.L.; Arbib, M.A.: Topics in Mathematical System Theory. McGraw-Hill; 1969.
- Khalil, H.: Nonlinear Systems. Prentice-Hall 2002.
- Lee, T.H. et al.: Computer Process Control: Modeling and Optimization. Wiley, 1968.

- Ljung, L.: System Identification: Theory for the User, 2nd Edition. Prentice-Hall, 1998.
- Maciejowsky, J.M.: Multivariable Feedback Design. Addison-Wesley; 1989.
- MATLAB. Especialmente "Control System Toolbox" y "Simulink".
- Øksendal, B.: Stochastic Differential Equations. Springer-Verlag; 2005.
- Sontag, E.D.: Mathematical Control Theory. Springer-Verlag; 1998.
- Stephanopoulos, G.: Chemical Process Control. Prentice-Hall, 1984.
- Strogatz, S.H.: Nonlinear Dynamics and Chaos. Perseus Books, 1998.
- Zhou, K.: Robust and Optimal Control. Prentice-Hall, 1996.

Introducción

Objetivo principal: presentar herramientas matemáticas que atraviesan las etapas de modelado, diseño, simulación y control de los procesos industriales, para:

(i) mejorar el funcionamiento dinámico de los procesos bajo criterios comunes al diseño en estado estacionario (optimización estática), y

(ii) determinar estrategias óptimas para los procesos que se apartan del equilibrio (procesos en lotes –batch-, arranque y parada de plantas) donde importan los aspectos no lineales.

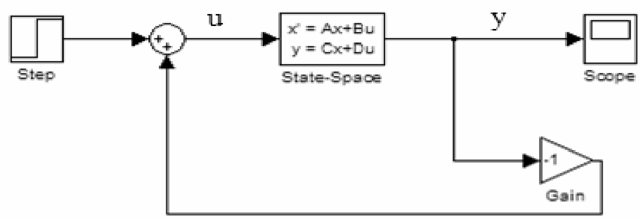
Algunos temas a tratar

- Contexto matemático de los sistemas de control en variable de estado. Dinámica de sistemas: equilibrios, controlabilidad, observabilidad, feedback, estabilidad y estabilización.
- Problema del regulador lineal-cuadrático óptimo (LQR) y ecuaciones de Riccati, tracking.
- Sistemas no lineales. Ecuaciones de Hamilton, ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman. Control de cambios de set-point en presencia de alinealidades. Tratamiento de restricciones.
- Tratamiento del ruido en las señales e incertidumbres en los parámetros del modelo. Filtro de Kalman-Bucy.

Consultas preliminares a los alumnos

- Preguntar por el tipo de inscripciones: becarios de Conicet, de Foncyt, docentes UTN, etc.
- Disposición de Matlab y Simulink.
- Utilización de álgebra lineal y herramientas matemáticas en el trabajo habitual.
- Contacto previo con instrumentación y control de procesos.
- Contestar a tsinoli@ceride.gov.ar

Modelo típico de Simulink



Primeras clases

- Sistemas dinámicos.
- Sistemas de control.
- Álgebra Lineal: autovalores, exponenciales, matrices ortogonales (simétricas), raíz cuadrada, integración de ecuaciones diferenciales.
- Ejercicios introductorios en MATLAB.

Génesis del problema de control

Un problema técnico-económico relacionado con procesos de Ingeniería Química conduce, como se vió en los cursos anteriores, a una formulación matemática que involucra, en general:

(i) ecuaciones descriptivas de la dinámica del proceso (o sea de su evolución temporal) y de sus "estados estacionarios"

(ii) evaluación económica del proceso y de sus resultados

Objetivos usuales en la evaluación económica del proceso

- Maximizar ganancia
- Minimizar costos
- Minimizar el tiempo de proceso
- Maximizar la calidad de los productos
- REFLEXIONES: algunos de estos criterios son incompatibles entre sí. ¿Puede elaborarse un "costo" generalizado a minimizar, que contemple todos los factores?

Etapas frecuentes

1)Enfoque puramente técnico:

- Análisis → Modelación → Control

2)Enfoque con énfasis económico:

- Optimización estática → Control Óptimo

Interpretación del término “control”

- Una vea que se tiene un modelo de proceso, en general se hacen simulaciones para “validarlo”
- Si alguna variable del modelo puede ser “manipulada” para modificar el funcionamiento del proceso, dicha variable es un posible “control”
- “Controlar el proceso” es decidir cómo manipular las variables a disposición

Optimización estática y dinámica

Una vez adoptada la configuración (flow-sheet) del proceso, la optimización estática tiende a elegir los "valores de trabajo" de las variables. En el caso de procesos continuos, dichos valores se "deben" mantener "constantes" mediante la manipulación de las variables de control. Los valores de arranque y llegada juegan el mismo papel en los procesos batch.

Distintas configuraciones del sector "Control de Procesos"

- Controladores analógicos o digitales
- Control "feedforward", "feedback"
- Control local o centralizado
- Control "SISO" o "MIMO". Decoupling
- Control determinístico o estocástico
- Control lineal y/o no-lineal
- Control óptimo y/o control robusto.
- Control adaptativo

Relaciones entre optimización estática y dinámica

12 The Role of Computer Process Control Systems

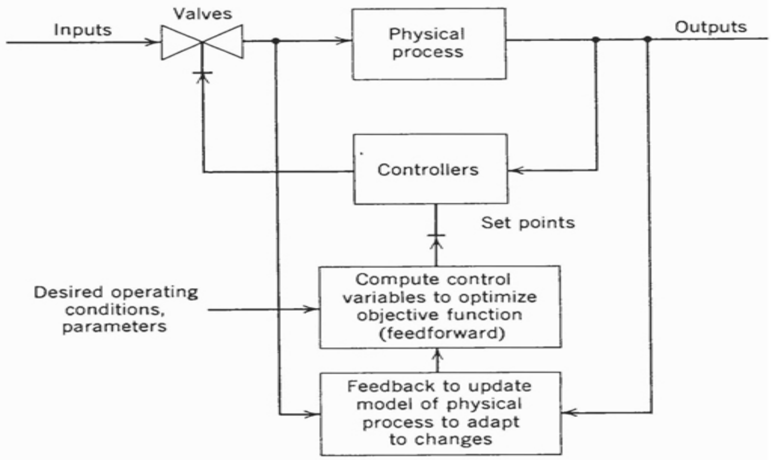


Fig. 1.3-6 Combined feedforward and feedback optimal control.

Control local (single-loop)

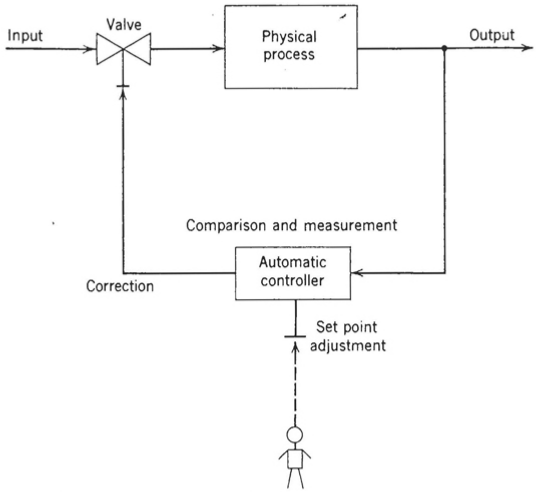


Fig. 1.1-3 Process control by local automatic controllers.

Control centralizado (Multiple-loops)

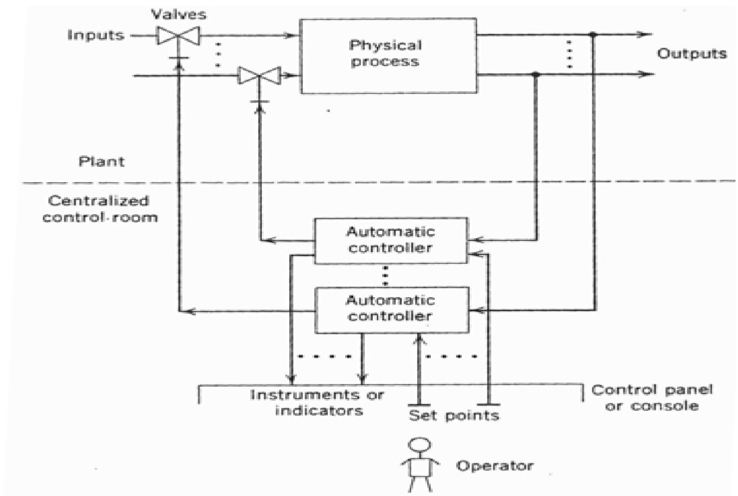


Fig. 1.1-4 Process control by centralized automatic controllers.

Criterios de optimización dinámica

Hemos visto que, en general, la adopción de los valores de trabajo depende de la maximización de una "utilidad" (o la minimización de un "costo") generalizados. El caso típico para la optimización dinámica es:

COSTO TOTAL = Costos de proceso durante su trascurso + Desviación de las expectativas finales.

COSTO TOTAL

1) **<u>Costos de proceso</u>**: gastos de energía, mantenimiento de equipos, costo del monitoreo de las condiciones de funcionamiento, requerimientos ambientales, desviación del equilibrio o de la trayectoria de referencia, etc.
2) **<u>Desviaciones de las expectativas</u>**: penalizaciones por no conseguir la pureza del producto deseada, la velocidad de producción, el cumplimiento de los plazos planificados, etc.

Cómo se quiere controlar

- Tradicionalmente se equiparó “control” con “regulación” o con “estabilización”, se pensó que todos los sistemas eran lineales, y que estas funciones del control eran alcanzables con controladores PID.
- A veces se presenta un objetivo como único (obtener máxima producción, o máxima pureza), dependiendo del sector de la empresa que maneja el problema.
- Pero pueden haber otros objetivos, a veces contrapuestos, y por eso conviene interactuar con todos los equipos de trabajo, y/o participar de las distintas etapas de la solución.

Más sobre "cómo" controlar

- Regulación implica mantener algo "en regla", en general esto se interpreta como mantener un proceso en funcionamiento estable, sin que se alteren sus condiciones
- Éste u otros objetivos deben poder explicitarse a través de los términos y variables que aparecen en el modelo matemático y que son "medibles". Por ejemplo, las concentraciones de especies químicas no son accesibles en todo tiempo

Tipos de modelos

- Dimensión finita. ODEs
- Dimensión infinita. PDEs
- Modelos lineales y no lineales, en tiempo continuo o discreto, etc.
- Materiales con "memoria". Ecuaciones integrales
- Modelos estocásticos

Un ejemplo típico de "modelo" determinístico, de dimensión finita, tiempo continuo, no lineal.

- El "reactor tanque agitado" (CSTR) es una idealización de un recipiente de funcionamiento continuo donde transcurre una reacción química.
- Se asume que la agitación es tan perfecto que la concentración es uniforme dentro del tanque.
- Además, la concentración de la alimentación se transforma "instantáneamente" en la concentración dentro del tanque, que a su vez es la concentración de salida

Reactor Tanque Agitado

(Continuous Stirred Tank Reactor - CSTR)

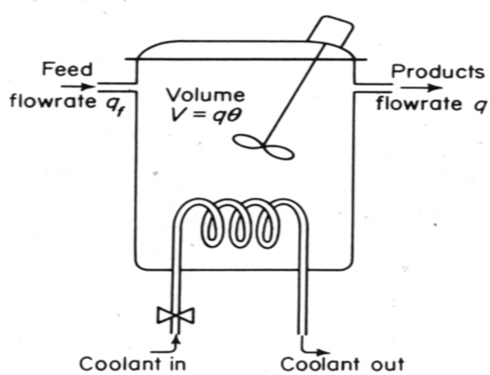


Fig. 7.2 The stirred tank reactor.

Modelación del sistema CSTR Ecuaciones de la "dinámica"

$$\dot{\xi} = -\frac{\xi}{\theta} + r(\xi, T) \text{ (balance de masa)}$$

$$\dot{T} = \frac{T_f - T}{\theta} + J \cdot r(\xi, T) - \tilde{Q} \text{ (balance de energía)}$$

Significado de las variables

ξ: grado de avance; $\xi \triangleq \frac{c - c_f}{\alpha}$; c: concentración de la especie A;

f: (feed, subínd. para referirse a "la entrada"); T: temperatura;

α: coef. estequiométrico de especie A; Reacción: $A + \beta B \rightarrow \alpha A + \gamma B$

V: volumen de CSTR con mezcla reaccionante; q: caudal de mezcla

θ: tiempo de residencia; $\theta = V / q$;

$J \triangleq \frac{\Delta H_r}{C_p}$; ΔH_r: calor de reacción; C_p: calor específico de mezcla

$\tilde{Q} \triangleq \frac{Q}{V C_p}$; Q: caudal del refrigerante

Algunas condiciones de funcionamiento, o restricciones

- Flujo continuo, volumen constante dentro del reactor
- Agitación perfecta
- Velocidad de reacción alta, permite asumir que la concentración dentro del reactor es igual a la de salida
- La temperatura es uniforme en el reactor

Puntos de equilibrio

Se pretende trabajar en "estado estacionario"

Equilibrio $\Rightarrow$ velocidades nulas

$$\dot{\xi} = F(\xi, T)$$

$$\dot{T} = G(\xi, T)$$

$$Equilibrio \Rightarrow F(\xi, T) = G(\xi, T) = 0$$

¿Cuántos equilibrios?

- Como las funciones F,G son en general no lineales, entonces las raíces de las ecuaciones F=G=0 pueden ser varias (pueden llegar a ser infinitas).
- Si las ecuaciones fueran lineales, o sea del tipo

  $F = a\xi + bT$

  $G = c\xi + dT$

  entonces el único equilibrio con sentido sería $\xi = T = 0$.

Un único punto de equilibrio

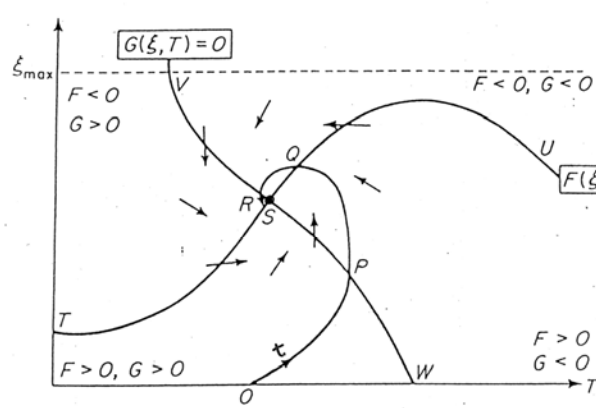


Fig. 7.17 The phase plane for a single steady state.

Varios puntos de equilibrio

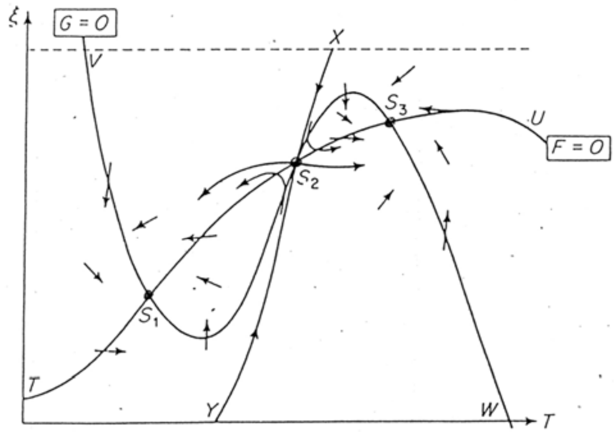


Fig. 7.20 Phase plane for three steady states.

INTERVALO

Resultado sobre Linealización

Las trayectorias de sistemas no lineales lucen, cerca del equilibrio, como las de su linealización.

(ver enunciado correcto en H-S, pp. 180-190)

Linealización de la dinámica

$$(\overline{\xi},\overline{T}) \text{ equilibrio} \Leftrightarrow F(\overline{\xi},\overline{T}) = G(\overline{\xi},\overline{T}) = 0$$

$$x_1 \triangleq \xi - \overline{\xi}; \quad x_2 \triangleq T - \overline{T}$$

$$\dot{x}_1 = \dot{\xi} = F(\xi, T) = F(\overline{\xi} + x_1, \overline{T} + x_2)$$
$$\dot{x}_2 = \dot{T} = G(\xi, T) = G(\overline{\xi} + x_1, \overline{T} + x_2)$$

$$x \triangleq \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \overline{x} \triangleq \begin{pmatrix} \overline{\xi} \\ \overline{T} \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{x} = \begin{pmatrix} F(\overline{x} + x) \\ G(\overline{x} + x) \end{pmatrix}$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} F(\overline{x}) \\ G(\overline{x}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial F / \partial x_1 & \partial F / \partial x_2 \\ \partial G / \partial x_1 & \partial F / \partial x_2 \end{pmatrix} \cdot x + o(x) = 0 + Ax + o(x)$$

Aplicación a los sistemas de control

Sistema original $\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \quad ; \quad x(0) = x_0 \\ y = h(x) \end{cases}$

Sistema linealizado $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \quad ; \quad x(0) = x_0 \\ y = Cx \end{cases}$

donde:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x},\overline{u}) \quad ; \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(\overline{x},\overline{u}) \quad ; \quad C = \frac{\partial h}{\partial x}(\overline{x})$$

$(\overline{x},\overline{u})$ es un "equilibrio": $f(\overline{x},\overline{u}) = 0$

Trayectorias de un sistema lineal

- Un sistema dinámico lineal siempre tiene, para cada condición inicial, una trayectoria única que pasa por allí, y que se extiende para todo t.
- Las trayectorias, entonces, no se cruzan nunca.
- En el caso n=2 se pueden graficar las trayectorias de los dos estados, con t como parámetro. Esta representación se suele llamar “espacio de fases”, y las trayectorias aparecen como un “flujo”, similar al de las partículas de un fluido.

Repaso de Álgebra Lineal

- Autovalores y autovectores $A\,v = \lambda\,v$
- Exponencial de una matriz $\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$
- Solución de una ODE lineal

$$\dot{x} = A\,x,\ x(0) = x_0$$

$$x(t) = e^{At} x_0$$

Interpretación geométrica

$$Av = \lambda v \quad \text{con} \quad v \neq 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} v \text{ es un autovector} \\ \text{correspondiente al autovalor } \lambda \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} \left(A - \lambda I\right) v = 0 \\ v \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A - \lambda I \text{ no es invertible (¿por qué?)}$$

$$\Rightarrow \quad \det\left(A - \lambda I\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \text{ raíz del polinomio}$$

$$p_A(x) = \det\left(A - xI\right)\ ,\ \text{"polinomio característico de } A\text{"}$$

Distintos tipos de autovalores

- Interpretación de un autovalor
- Relación con la traza y el determinante
- Autovalor 0
- Autovalor real positivo o negativo
- "Autovalor" complejo

Transformaciones de similaridad

Recordar que una matriz A representa la acción de una transformación lineal $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$T_A(x) = T_A\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \underline{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \underline{e}_i \quad ,$$

donde $\mathcal{B}_c = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots \underline{e}_n\}$ es la base canónica.

Recordar también que la misma transformación lineal tiene una matriz B distinta si se expresa en otra base $\mathcal{B}$, y que estas matrices se relacionan

$$B = QAQ^{-1} \quad , \quad \text{donde}$$

Q está asociada con la transdormación $\mathcal{B}_c \to \mathcal{B}$

Invariantes

Las matrices A , B relacionadas en la forma

$B = QAQ^{-1}$ se dice que son "similares"

(puesto que en realidad dependen de una elección de base para representar una misma transformación)

Notar que se verifica (ejercicio):

$$\det(A) = \det(B)$$

$$tr(A) = tr(B)$$

y por eso se dice que el determinante y la traza son "invariantes" frente a cambios de base.

Tipos de trayectorias

- Alrededor de un punto de equilibrio, el comportamiento de un sistema tiene un número finito de "opciones"
- La disciplina de "Sistemas Dinámicos" (dynamical systems) estudia la identificación de dichas opciones y sus consecuencias
- Bifurcación, ciclos límites, caos, atractores extraños, etc., tienen mucha relevancia sobre el conocimiento profundo de los sistemas reales

Ensilladura

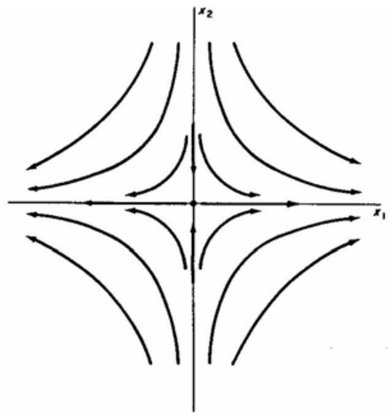


FIG. D. Some solution curves to $x' = Ax$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Nodo

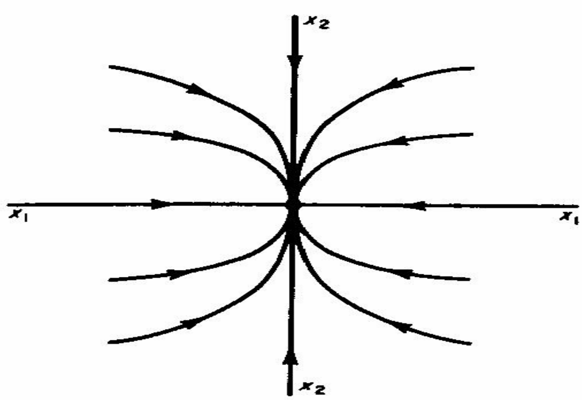


FIG. C. Node: $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$, $\lambda < \mu < 0$.

Nodo impropio

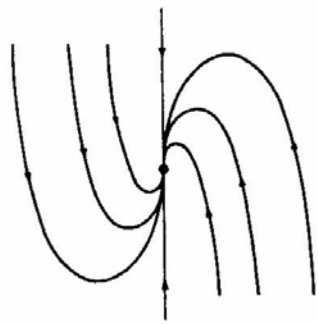


FIG. D. Improper node: $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$, $\lambda < 0$.

Foco (fuente o sumidero)

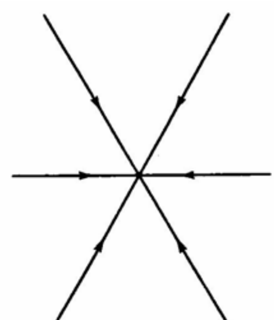


FIG. B. Focus: $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, $\lambda < 0$.

Centro

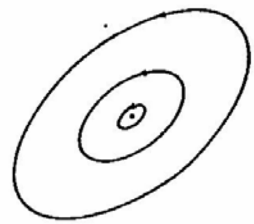


FIG. F, Center: $B = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}$, $b > 0$.

Espiral (convergente o divergente)

FIG. E. Spiral sink: $B = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, $b > 0 > a$.

Clasificación de equilibrios en sistemas de dimensión 2

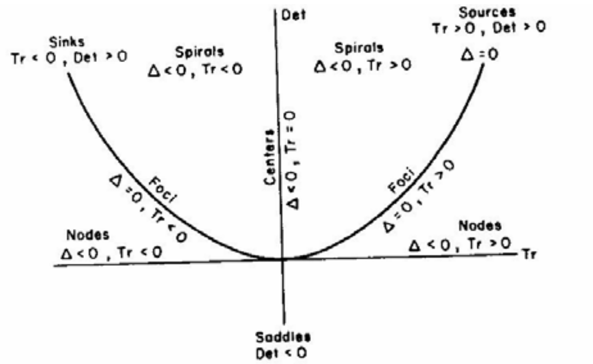


FIG. G

Algunos temas a repasar

- Autovalores y autovectores
- Soluciones de ecuaciones diferenciales (especialmente lineales)
- Producto interno, norma, distancia
- Derivadas de funciones $f : R^n \rightarrow R^m$
- Relaciones entre matrices y transformaciones lineales de espacios vectoriales
- Cambio de variables, Jacobianos

Ejercicios sugeridos

- Hallar la exponencial de las siguientes matrices, a mano y con Matlab: $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- Considerar el sistema lineal inhomogéneo:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad ; \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  Hallar la solución exacta y comprobar con Matlab
- Descubrir qué tipo de ODEs no tienen solución única, y otras que “explotan” en un tiempo finito.
- Explorar los demos de control de Matlab, en especial, tipee: heatex.