

# I. Ondas Electromagnéticas

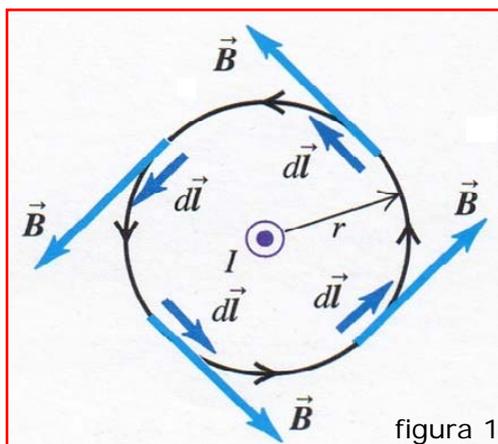
## I.1 Ecuaciones de Maxwell

### ◆ Corriente de Desplazamiento y Ley de Ampere Generalizada:

Al pasar al estudio de los campos variables dependientes del tiempo, es necesario considerar los fenómenos eléctricos y magnéticos no por separado sino en conjunto, teniendo en cuenta sus acciones recíprocas.

Hemos visto que un campo magnético variable da origen a un campo eléctrico inducido. Pero resulta además que, en uno de los ejemplos más notables de la simetría de la naturaleza, un campo eléctrico variable da origen a un campo magnético. Este efecto tiene una enorme y trascendental importancia, ya que explica y pone de manifiesto la existencia de las ondas de radio, los rayos gamma y la luz visible, como así también todas las demás formas de ondas electromagnéticas.

Para establecer el origen de la relación entre los campos eléctricos variables y los campos magnéticos, tenemos que volver a la ley de Ampere:

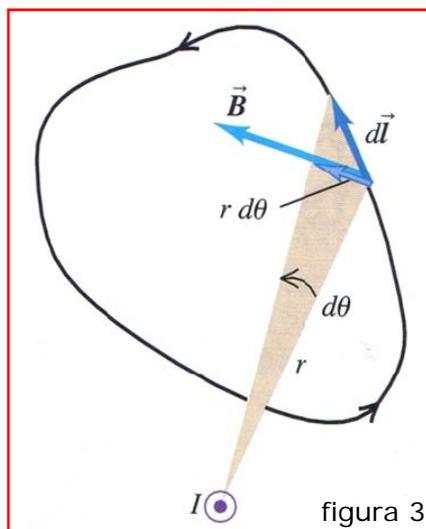
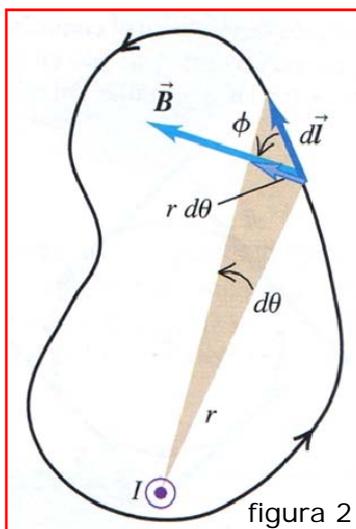


$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

En esta expresión, el primer miembro es la integral de línea del vector inducción  $\vec{B}$  a lo largo de un contorno cerrado, mientras que  $I_{enc}$  es la corriente enlazada por dicho contorno.

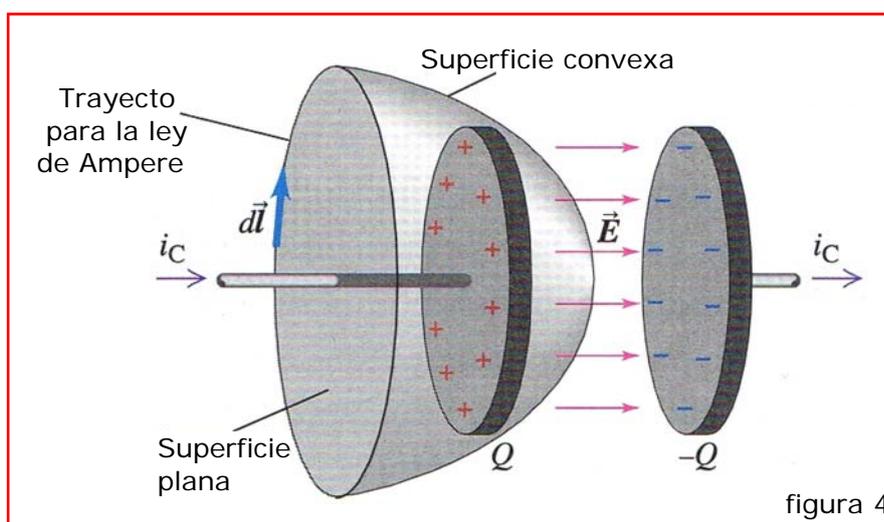
La aplicación más simple de la ley de Ampere se representa en la [figura 1](#). Trayectos de integración más generales se observan en las [figuras 2 y 3](#). En esta última, el camino de integración no encierra al conductor.

La Ley de Ampere fue formulada para un campo magnético inmóvil y una



NOTA:  
 En las  
 figuras  
 2 y 3,  
 la  
 transformación  
 $dl \cos \phi = r d\theta$   
 es necesaria  
 para efectuar  
 la integración  
 (que nosotros  
 no realizaremos  
 en nuestro  
 desarrollo).

corriente eléctrica invariable en el tiempo, razón por la cual su expresión resulta incompleta. Para entender el porqué de esta aseveración, vamos a considerar el proceso de carga de un capacitor. En la *figura 4*, un conductor introduce una corriente  $i_c$  en una placa y otro conductor la extrae de la otra placa. La carga  $Q$  aumenta y el campo eléctrico  $\vec{E}$  entre las placas crece. La notación  $i_c$  indica el valor instantáneo de lo que llamaremos corriente de conducción (para distinguirla de otra que estamos por encontrar).



Si ahora aplicamos la ley de Ampere al trayecto circular que se observa, la integral  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$  alrededor de este trayecto es igual a  $\mu_0 I_{enc}$ . En el caso del área circular plana delimitada por el círculo,  $I_{enc}$  es simplemente la corriente  $i_c$

en el conductor izquierdo. Pero la superficie convexa está delimitada por el mismo círculo, y la corriente a través de esa superficie es cero. En consecuencia,  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$  es igual a  $\mu_0 i_C$  y al mismo tiempo es igual a *cero*. Esto evidentemente es una contradicción.

Pero algo más ocurre en la superficie convexa: *a medida que el capacitor se carga*, aumentan el campo eléctrico  $\vec{E}$  y el flujo eléctrico  $\Phi_E$  a través de la misma. Podemos determinar la *velocidad de variación* en función de la carga y de la corriente.

La carga instantánea es  $q = C v$ , donde  $C$  es la capacidad y  $v$  la diferencia de potencial instantánea.

Para un capacitor de placas paralelas:  $C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$ , donde  $A$  es el área de las placas y  $d$  la separación.

La diferencia de potencial entre las placas es:  $v = E d$ .

Suponemos que la región está llena de un material de permitividad  $\epsilon$ , por lo que sustituimos  $\epsilon_0$  por  $\epsilon$ .

Ahora podemos expresar la *carga del capacitor* en la siguiente forma:

$$q = C v = \frac{\epsilon A}{d} E d = \epsilon E A = \epsilon \Phi_E \quad (1)$$

A medida que el capacitor se carga, la velocidad de variación de  $q$  es la corriente de conducción  $i_C = dq/dt$ . Derivando la ecuación (1) con respecto al tiempo, se obtiene:

$$i_C = \frac{dq}{dt} = \epsilon \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Si ahora imaginamos una corriente ficticia  $i_D$  en la región comprendida entre las placas, podemos definir la misma como sigue:

$$\boxed{i_D = \epsilon \frac{d\Phi_E}{dt}} \quad \text{corriente de desplazamiento} \quad (2)$$

Es decir, suponemos que, en la *ley de Ampere*, el flujo variable que atraviesa

la superficie curva de la *figura 4* es equivalente a una corriente de conducción a través de la misma. Incluimos esta corriente ficticia  $i_D$  en la *ley Ampere*, junto con la corriente de conducción real  $i_C$  :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (i_C + i_D)_{enc} \quad \text{ley de Ampere generalizada} \quad (3)$$

En esta forma, la ley se cumple para cualquier superficie que se utilice. En el caso de la *figura 4*, para la superficie plana  $i_D$  es cero y para la superficie curva  $i_C$  es cero; además, la  $i_C$  de la superficie plana es igual a la  $i_D$  de la superficie curva.

*Esta ecuación sigue siendo válida en un material magnético, siempre y cuando la magnetización sea proporcional al campo externo y se sustituya  $\mu_0$  por  $\mu$ .*

La corriente ficticia  $i_D$  fue ideada en 1865 por el físico escocés James Maxwell, quien la llamó *corriente de desplazamiento*. Existe además una densidad de corriente de desplazamiento:

$$\text{densidad de corriente de desplazamiento: } J_D = \frac{i_D}{A}$$

$$\text{A partir de } \Phi_E = E A \quad \Rightarrow \quad J_D = \epsilon \frac{dE}{dt}$$

Una ventaja adicional de la corriente de desplazamiento, es que permite generalizar la regla de los nudos de Kirchhoff ("la suma algebraica de las corrientes en cualquier nudo es cero"). Considerando la placa izquierda del capacitor, tenemos una corriente de conducción que entra en ella pero ninguna que salga. Cuando incluimos la corriente de desplazamiento, tenemos una corriente de conducción que entra por un lado y una corriente de desplazamiento equivalente que sale del otro lado. Generalizando el significado del término "corriente", podemos decir que *una corriente pasa a través del capacitor*.

Ahora nos preguntamos: *¿la corriente de desplazamiento tiene algún significado físico real o es simplemente un artificio para satisfacer simultáneamente la ley de Ampere y la regla de los nudos de Kirchhoff?* En lo que sigue intentaremos responder a esa pregunta.

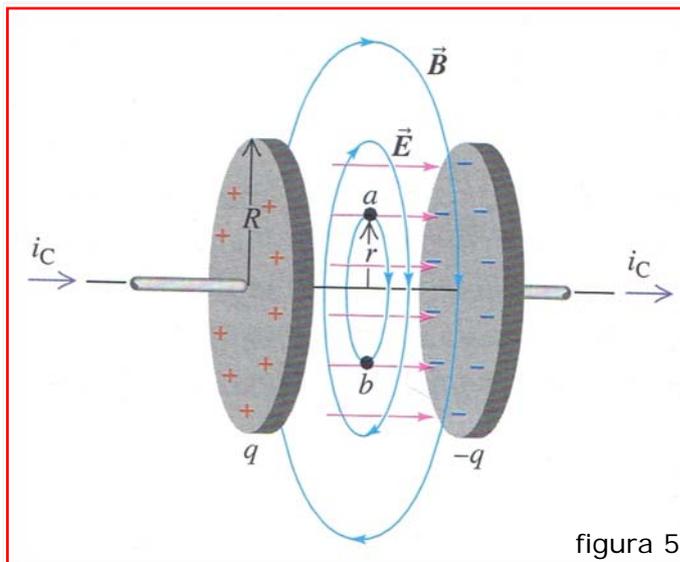


figura 5

Consideremos un área circular plana entre las placas paralelas de un capacitor circular de radio  $R$ , como se muestra en la *figura 5*. Si la corriente de desplazamiento desempeña realmente el papel que hemos supuesto, durante la carga del capacitor debe haber un campo magnético en la región comprendida entre sus placas.

Para hallar el campo magnético en un punto de dicha región ubicado a una distancia  $r$  del eje del capacitor, aplicamos nuestra *ley de Ampere generalizada* a un círculo de radio  $r$  que pasa por ese punto ( $r < R$ ).

La corriente total encerrada por el círculo es  $J_D$  multiplicada por su área, o sea:  $\left(\frac{i_D}{\pi R^2}\right) (\pi r^2)$ . La integral  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$  es simplemente el producto de  $B$  por la circunferencia  $2\pi r$  del círculo. Puesto que  $i_D = i_C$  en el capacitor en proceso de carga, la *ley de Ampere* se convierte en:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B = \mu_0 \frac{r^2}{R^2} i_C$$

de donde:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{r}{R^2} i_C \quad (4)$$

Este resultado predice que, en la región entre las placas del capacitor, el vector inducción  $\vec{B}$  es *cero en el eje* y *aumenta en forma lineal con la distancia al eje*. Mediante un cálculo similar se demuestra que afuera de la región entre las placas ( $r > R$ ),  $\vec{B}$  es el mismo que si *el alambre fuera continuo y las placas no estuviesen presentes*.

Cuando se mide el campo magnético en esta región, se encuentra que realmente está ahí y que se comporta exactamente como lo predice la ecuación (4). Esto confirma claramente el papel de la corriente de

desplazamiento como fuente de campo magnético y que, lejos de ser la misma un simple artificio, es un hecho fundamental de la naturaleza. Este descubrimiento de Maxwell fue un paso audaz de un genio extraordinario.

### ◆ Ecuaciones de Maxwell del Electromagnetismo:

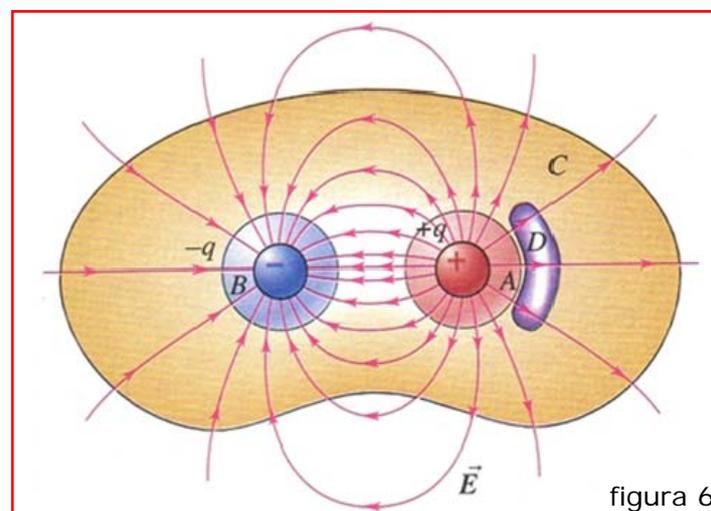
Las "Ecuaciones de Maxwell" se componen de un paquete de cuatro ecuaciones. Maxwell no descubrió las mismas por sí solo (*aunque sí ideó el concepto de corriente de desplazamiento*), sino que las juntó y reconoció su importancia, en particular para predecir la existencia de las ondas electromagnéticas.

Enunciaremos estas ecuaciones en su forma más simple, que es el caso en que se tienen *cargas y corrientes en un espacio vacío*. Más adelante veremos cómo se modifican estas ecuaciones si está presente un *material dieléctrico o magnético*.

#### • PRIMERA ECUACIÓN: "Ley de Gauss de los Campos Eléctricos"

La ley de Gauss establece que "el *flujo eléctrico total (o número neto de líneas de campo) a través de cualquier superficie cerrada (superficie gaussiana) es proporcional a la carga eléctrica total (neta) dentro de la superficie*" (*figura 6*).

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \quad (5)$$

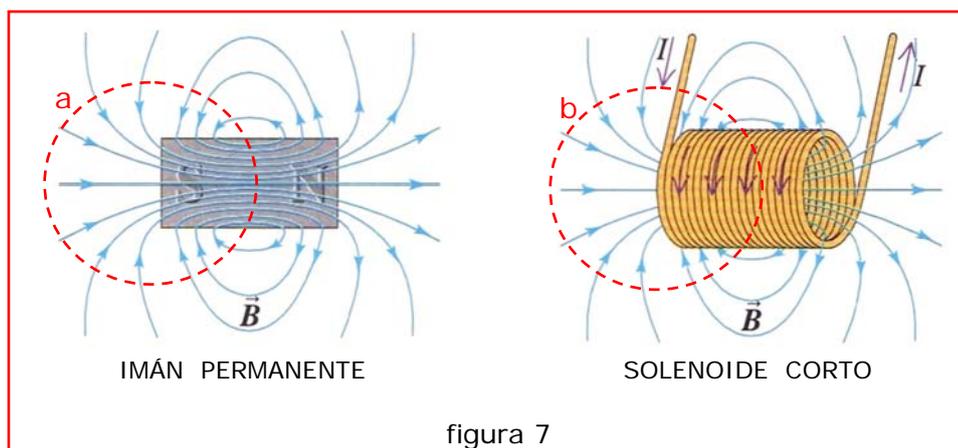


En la figura 6, La superficie A encierra la carga positiva, luego  $Q_{enc} = +q$ . La superficie B encierra la carga negativa, luego  $Q_{enc} = -q$ . La superficie C, que encierra ambas cargas, tiene  $Q_{enc} = +q + (-q) = 0$ . La superficie D, que no encierra carga alguna, también tiene  $Q_{enc} = 0$ . Podemos sacar conclusiones semejantes examinando las líneas de campo eléctrico: de la superficie A salen 18 líneas; a la superficie B entran 18 líneas; la superficie C tiene 8 líneas entrantes y 8 líneas salientes, por lo que el número neto de líneas que cruzan en cualquier dirección es cero; la superficie D tiene 3 líneas entrantes y 3 líneas salientes, por lo que resulta igual al caso anterior.

- SEGUNDA ECUACIÓN: “Ley de Gauss de los Campos Magnéticos”**

Esta ley de Gauss establece que “el flujo magnético total a través de cualquier superficie cerrada (superficie gaussiana) es siempre cero” (figura 7).

$$\Phi_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (6)$$



La figura 7 muestra las líneas de campo magnético en un imán recto y en un solenoide de longitud finita. En ambos casos estas líneas entran por un extremo, continúan por dentro y salen por el otro extremo. En las superficies gaussianas a y b, se observa que toda línea de campo que penetra en las mismas también sale de ellas; el flujo neto a través de estas superficies es cero. Se deduce asimismo que las líneas de campo magnético siempre forman espiras cerradas.

El hecho de que aparezca un cero en el segundo miembro de la ecuación (6) pero no en el segundo miembro de la ecuación (5), quiere decir que en magnetismo no hay el equivalente de la carga libre  $q$  en electricidad. El imán y el solenoide de la figura 7 son *dipolos magnéticos*, pero no hay “fuentes” ni “sumideros” de  $\vec{B}$ ; es decir, no hay polos magnéticos libres o aislados.

- **TERCERA ECUACIÓN: “Ley de Ampere Generalizada”**

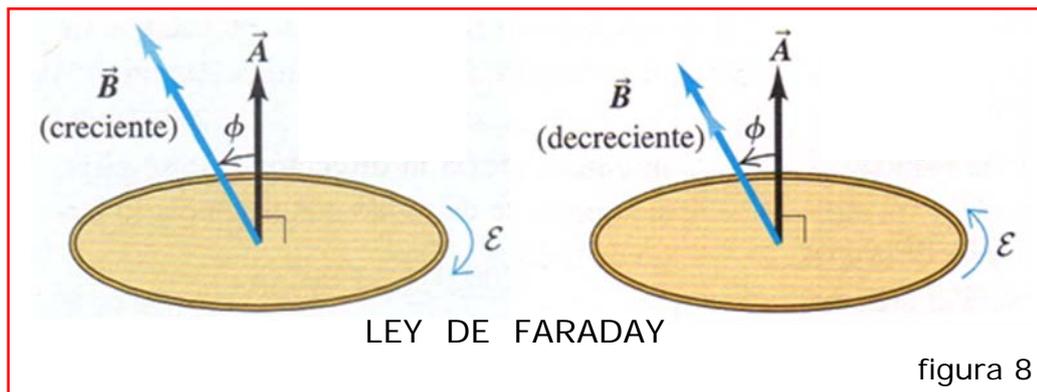
Esta es la ley de Ampere que incluye la *corriente de desplazamiento de Maxwell*, que hemos visto en páginas anteriores:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (i_c + \epsilon \frac{d\phi_E}{dt})_{enc} \quad (7)$$

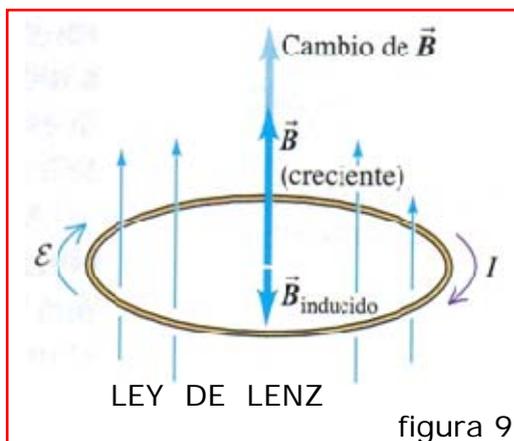
- **CUARTA ECUACIÓN: “Ley de la Inducción de Faraday”**

La ley de la inducción electromagnética de Faraday establece que, “la f.e.m. inducida en una espira cerrada es igual a la velocidad de variación del flujo magnético que la atraviesa, cambiada de signo” (figura 8).

$$e = - \frac{d\phi_B}{dt} = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$



La *ley de Lenz* (figura 9) establece que “el sentido de una f.e.m. inducida es tal que se opone a la causa que la produce”. Esta ley, que no es un principio independiente sino que se deduce de la ley de Faraday, suele ser más fácil de utilizar y nos ayuda a comprender intuitivamente diversos efectos inductivos.



Sabemos que otra definición de la fuerza electromotriz en un circuito es la siguiente:

$e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$ . Ésta expresa que “la f.e.m. de un circuito es igual a la integral curvilínea de la intensidad del campo eléctrico a lo largo de dicho circuito”. El significado de  $E$  en esta ecuación es fuerza neta por unidad de carga. Si combinamos esta expresión con la

ley de Faraday antes indicada, se obtiene:

$$\oint \vec{E} \, d\vec{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (8)$$

que es la forma usual de la ley de Faraday. Esta forma *es válida sólo si el trayecto alrededor del cual se efectúa la integración es constante*. Si hay un flujo magnético variable, la integral de la ecuación no es cero, lo que indica que el campo  $\vec{E}$  así originado no es conservativo.

*Los campos eléctricos inducidos no están relacionados con cargas, sino con un flujo magnético cambiante. Aún cuando ambas clases de campos eléctricos ejercen fuerzas sobre las cargas, hay una diferencia entre ellos. La manifestación más simple de esta diferencia es que las líneas de  $E$  relacionadas con un flujo magnético variable pueden formar curvas cerradas; en cambio, las líneas de  $E$  relacionadas con cargas no pueden formar curvas cerradas, sino que siempre tienen que salir de una carga positiva y terminar en una negativa.*

*La ecuación que define la diferencia de potencial entre dos puntos  $a$  y  $b$  es:*

$V_b - V_a = W_{ab}/q_o = - \int_a^b \vec{E} \, d\vec{l}$  (donde  $q_o$  es la carga transportada y  $W_{ab}$  es el trabajo realizado). Para que el potencial tenga un significado útil, esta integral (y también  $W_{ab}$ ) debe tener el mismo valor para cualquier trayectoria que una  $a$  con  $b$ . Un caso especial ocurre cuando  $a$  y  $b$  son el mismo punto: la trayectoria que los une constituye ahora un circuito cerrado y  $\oint \vec{E} \, d\vec{l} = 0$ .

*Cuando hay un flujo magnético cambiante,  $\oint \vec{E} \, d\vec{l}$  no puede ser cero sino que su valor es, de acuerdo con la ley de Faraday,  $- d\Phi_B/dt$ .*

*Los campos eléctricos relacionados con cargas estacionarias son conservativos, mientras que los asociados con campos magnéticos cambiantes son no conservativos. El potencial eléctrico, que se puede definir sólo para una fuerza conservativa, no tiene ningún significado para campos eléctricos inducidos.*

### • Conclusiones

Existe una notable simetría en las cuatro ecuaciones de Maxwell. En el espacio vacío, donde no hay cargas, las primeras dos ecuaciones [(5) y (6)] tienen *idéntica forma*, una con  $E$  y la otra con  $B$ . Cuando se comparan las otras dos ecuaciones, la (7) afirma que *un flujo eléctrico cambiante origina un campo magnético* y la (8) que *un flujo magnético cambiante origina un campo eléctrico*; además, en el espacio vacío, donde no hay corriente de conducción ( $i_c = 0$ ), estas dos ecuaciones *tienen la misma forma* (salvo una constante numérica

y un signo negativo) *con los papeles de E y B intercambiados*.

Las ecuaciones (7) y (8) se pueden escribir de una forma diferente pero equivalente, introduciendo las definiciones de flujo eléctrico y magnético:

$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$  y  $\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$ , respectivamente. En el espacio vacío, donde no hay ni cargas ni corrientes de conducción ( $i_c = 0$  y  $Q_{enc} = 0$ ), se tiene:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad (9)$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (10)$$

En estas expresiones se advierte una vez más la simetría entre los papeles de los campos *E* y *B*.

El rasgo más notable de estas ecuaciones es que un campo que varía con el tiempo, de una u otra clase, induce un campo de la otra clase en regiones próximas del espacio. Maxwell reconoció que estas relaciones predecían la existencia de perturbaciones electromagnéticas consistentes en *campos eléctricos y magnéticos que varían con el tiempo y que viajan o se propagan de una región a otra del espacio*, aunque no haya materia interpuesta. Estas perturbaciones, llamadas *ondas electromagnéticas*, constituyen la base física de la luz, las ondas de radio y televisión, el infrarrojo, el ultravioleta, los rayos X y el resto del espectro electromagnético.

