# 5. Aritmética y Álgebra

## 5.1 Suma Algebraica

- *Introducción*:

La Expresión:

$$\{[(9 - 4) + 3] + 1\} - 2$$

es una *suma algebraica* y debe operarse en el siguiente orden:

Se halla la diferencia 9 – 4, al resultado se le suma 3, al nuevo resultado se le suma 1 y a éste último resultado se le resta 2.

Cuando se opera *en este orden*, se ha convenido en *suprimir los paréntesis, los corchetes y las llaves*, escribiendo los números uno a continuación de otro:

$$\{[(9 - 4) + 3] + 1\} - 2 = 9 - 4 + 3 + 1 - 2$$

Se llaman *términos de la suma algebraica* a cada uno de los números de la misma, separados por los signos más o menos. A los términos precedidos por el signo más, se los llama *términos positivos*, y a los precedidos por el signo menos, *términos negativos*.

Para calcular el *valor de una suma algebraica* se puede proceder efectuando sucesivamente las operaciones término a término. Pero el procedimiento más rápido es ⇒ *restar de la suma de los términos positivos*, *la suma de los términos negativos*:

$$(9 + 3 + 1) - (4 + 2) = 13 - 6 = 7$$

- *Pasaje de términos de un miembro a otro de una igualdad:*

$$m - s = d \iff m = d + s$$

• *"Todo término que está en un miembro precedido por el signo menos, se puede pasar al otro miembro precedido por el signo más. Recíprocamente, si un término figura en un miembro con el signo más, se puede pasar al otro miembro con el signo menos".*

$$x + 5 = z \iff x = z - 5$$

$$a + 3 - b = 8 + c - 6 \iff a + 3 - c = 8 - 6 + b$$

- *Reducción de Términos:*

$$(a + b) - b = a \qquad\qquad (a - b) + b = a$$

• *"Cuando un mismo número figura dos veces en un mismo miembro, una con signo más y otra con signo menos, puede suprimirse".*

$$x = 23 + 4 + 9 - 4 \quad \Rightarrow \quad x = 23 + 9$$

$$a - 10 + 3 + 10 = b + 8 \quad \Rightarrow \quad a + 3 = b + 8$$

• *"Cuando un término figura en ambos miembros de una igualdad con el mismo signo, puede suprimirse".*

$$5 + 3 - a = 3 + 8 \quad \Rightarrow \quad 5 - a = 8$$

$$x + b - 2 = a + 9 - x - 2 \quad \Rightarrow \quad x + b = a + 9 - x$$

### *Supresión e intercalación de paréntesis:*

• *"Todo paréntesis, corchete o llave, precedido por el signo más, puede suprimirse, quedando los términos que encierra con sus correspondientes signos".*

$$9 + x + (3 - a - 5 + b) + 4 = 9 + x + 3 - a - 5 + b + 4$$

• *"Todo paréntesis, corchete o llave, precedido por el signo menos, puede suprimirse, escribiendo los términos que encierra con signos contrarios a los que tenían".*

$$a - (3 - x + b - 8) + 1 = a - 3 + x - b + 8 + 1$$

• Si en una suma algebraica figuran paréntesis, corchetes y llaves, para suprimirlos es conveniente proceder así: *"Primero se suprimen los paréntesis, luego los corchetes y por último las llaves".*

$\{23 - [5 - 4 + (1 + 12 - 5) + 3] - 2 - (4 - 1)\} + 10 =$

$= \{23 - [5 - 4 + 1 + 12 - 5 + 3] - 2 - 4 + 1\} + 10 =$

$= \{23 - 5 + 4 - 1 - 12 + 5 - 3 - 2 - 4 + 1\} + 10 =$

$= 23 - 5 + 4 - 1 - 12 + 5 - 3 - 2 - 4 + 1 + 10$

*Reduciendo términos:*

$23 - 5 + 4 - 1 - 12 + 5 - 3 - 2 - 4 + 1 + 10 =$

$= 23 - 12 - 3 - 2 + 10 = 16$

• *"Para intercalar un paréntesis precedido por el signo más, se escriben los términos que en él se encierran con los mismos signos que tenían".*

*En la expresión:* $9 + 8 - 5 - 3 + 10 - 2$

*Intercalando con 4 términos:* $9 + (8 - 5 - 3 + 10) - 2$

*Intercalando dos veces con 3 y 2 términos:* $(9 + 8 - 5) - 3 + (10 - 2)$

• *"Para intercalar un paréntesis precedido por el signo menos, se escriben los términos que en él se encierran con signos contrarios".*

*En la expresión:* $7 + 9 + 4 - 12 + 5 - 8$

*Intercalando con 3 términos:* $7 + 9 + 4 - (12 - 5 + 8)$

*Intercalando con otros 3 términos:* $7 + 9 - (-4 + 12 - 5) - 8$

• Si en una suma algebraica se quieren intercalar paréntesis, corchetes y llaves, es conveniente proceder así: *"Primero se intercalan las llaves, luego los corchetes y por último los paréntesis".*

*En la expresión:* $3 + 5 - a - 4 - 9 - 2 + x - 7 + m - 1$

*Intercalar una llave precedida por el signo más que abarque 9 términos, un corchete precedido por el signo menos que abarque 4 términos y un paréntesis precedido por el signo menos que abarque 3 términos:*

*Intercalando la llave:* $3 + \{5 - a - 4 - 9 - 2 + x - 7 + m - 1\}$

*Intercalando el corchete:* $3 + \{5 - a - [4 + 9 + 2 - x] - 7 + m - 1\}$

*Intercalando el paréntesis:* $3 + \{5 - a - [4 - (-9 - 2 + x)] - 7 + m - 1\}$

(El resultado de la intercalación de paréntesis se comprueba mediante la supresión de los mismos, después de lo cual debe obtenerse nuevamente la expresión original).

## Problemas:

Problema nº 1: En las siguientes igualdades, pasar de un miembro al otro todos los términos en color rojo:

1. $10 - 4 + a = x + 1$
2. $a + x - 2 + 5 - z = b - 3 + 4$
3. $m + n - 8 - 1 + x = z - 9 - 7$
4. $12 + a + 5 = 15 - 1 + x + 2 + b$

Problema Nº 2: Efectuar todas las reducciones posibles en las siguientes igualdades:

1. $x + a - 3 + 5 = z - 3$
2. $8 - 4 + z - 8 = k - 1$
3. $a - 7 + x - 7 = b - x + 1 - k$
4. $15 + 8 - z + 4 - 8 = 12 - z + 3$
5. $a - 5 + 3 - b - a + 3 + 5 = b - 3 + x$
6. $m - 4 + 15 - m - y + b = 15 + y - n + 5 + b - 5$

Problema Nº 3: Suprimir los paréntesis, corchetes y llaves y efectuar las operaciones en los siguientes ejemplos:

1. $18 - \{2 + [9 - (6 - 4) - 5]\}$
2. $15 - \{2 - [9 + (5 - 1) - (2 + 8 - 9) + 6] - 7\} + 8$

3. $(4 - x + 2) - [1 - (2 + x - 1) - y] + 3 - (2 + y + 3)$

4. $x + 6 - \{4 - 1 + x - [1 + 2 + (5 - y) - 1] - y\}$

Problema Nº 4: En la suma algebraica: 35 − 11 + 4 − 12 − 5 + 1, intercalar un corchete precedido por el signo menos que encierre todos los términos excepto el primero; y dentro de este corchete, un paréntesis precedido por el signo más que abarque los tres últimos términos.

Problema Nº 5: Intercalar, a voluntad, dos paréntesis, un corchete y una llave, en la siguiente suma algebraica: 9 − 2 − 3 − 4 + 5 − 1 + 2 + 7 − 3 − 1 + 8

## 5.2 Multiplicación de Números Naturales

### *Propiedades de la multiplicación:*

• *"Multiplicando miembro a miembro dos o más igualdades, se obtiene otra igualdad".*

$$\left.\begin{array}{l} a = b \\ c = d \\ e = f \end{array}\right\} \quad a\,c\,e = b\,d\,f$$

• *"Si uno de los factores es cero, el producto, necesariamente, debe ser cero. Recíprocamente, si el producto es cero, uno de los factores, necesariamente, debe ser cero".*

$$a \,.\, b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \;\; \textit{o bien} \;\; b = 0$$

• *"El producto de una suma algebraica por un número, es el número que se obtiene multiplicando cada término de la suma por dicho número y efectuando la suma algebraica de los productos parciales".*

$$(a + b - c - d + e)\, n = a\,n + b\,n - c\,n - d\,n + e\,n$$

*Ejemplo:* $(9 + 8 - 4 - 5)\, 3 = 9 \times 3 + 8 \times 3 - 4 \times 3 - 5 \times 3 =$

$= 27 + 24 - 12 - 15 = 24$

### *Múltiplos de un número:*

• *"Un número **p** es múltiplo de otro **m**, cuando resulta de multiplicar **m** por un numero natural cualquiera".*

Así por ejemplo:

múltiplos de 2 son: 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, . . .

múltiplos de 3 son: 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, . . .

múltiplos de 8 son: 0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, . . .

### Factor común:

• *"Si un número figura como factor en todos los términos de una suma algebraica, ese número se llama factor común".*

En la suma algebraica: $ax - bx + cx - yx$, el número $x$ figura en todos los términos como factor; luego, es el *factor común* de esa suma algebraica.

En la suma algebraica: $6 + 8 - 2 \times 5 + 14 - 4$, aparentemente no se destaca un factor común; pero observando vemos que podemos sustituirla por la siguiente:

$$2 \times 3 + 2 \times 4 - 2 \times 5 + 2 \times 7 - 2 \times 2$$

donde se evidencia que todos los términos tienen el *factor común 2*.

En la suma algebraica: $6ab - 9ax - 3a + 12axy$, analizando la misma vemos que podemos sustituirla por la siguiente:

$$3 \times 2ab - 3 \times 3ax - 3a + 3 \times 4axy$$

donde se observa que en todos los términos figuran el *factor común 3* y *el factor común a*.

• *"Si en todos los términos de una suma algebraica figura un factor común, esa suma algebraica es igual al producto de ese factor común por la suma algebraica que resulta de suprimir ese factor en cada término".*

*En símbolos:* $xm + xn - xp - xq = x\,(m + n - p - q)$

*Ejemplo:* $4axn - 6bnx - 10\,nxy + 2xn = 2xn\,(2a - 3b - 5y + 1)$

### Producto de una suma por otra:

• *"El producto de una suma por otra es igual a la suma de los productos que se obtienen multiplicando cada término de la primera suma por cada término de la segunda".*

*En símbolos:* $(a + b + c)\,(x + y) = ax + bx + cx + ay + by + cy$

*Ejemplo:*

$$(9 + 7 + 2)\,(m + n + 1) = 9m + 7m + 2m + 9n + 7n + 2n + 9 + 7 + 2$$

### Problemas:

Problema Nº 6: Efectuar los siguientes productos:

1. $(3 + 5 + 2 + 1 + 4)\,6x$
2. $2a\,(3 + 2x + 4)$
3. $(3a - 5b + 8 - 4y - 2)\,4$
4. $4x\,(5b - 2m + y - 4)$

5. 7ny (1 − 2a + 3b − 6x − 4z + c)

Problema Nº 7: Sacar factor común en las expresiones siguientes:

1. 30 + 25 − 15 − 10 + 45
2. 90 − 81 + 27 + 36 − 18 − 9 + 45
3. 3a + 5ab − 7ax − 4a
4. 9x + 6ax − 3x − 30 xy + 15xz
5. 15 abm − 10axb + 5nab − 30 azb + 75abcd

Problema Nº 8: Sacar factor común y efectuar las operaciones en los ejercicios siguientes:

1. 3y − 3 (y − 2)
2. 5a (x − y) + 5a (y − x)
3. 2m (z + p) − 2m (z − p)

Problema Nº 9: Efectuar los siguientes productos:

1. (8 + b) (3 + y)
2. (y + u) (z + p)
3. (2x + y + 3z) (a + b + 4)
4. (5x + p + q) (3a + 6)
5. (10 + 2a + z) (m + 3n + 2y)

## 5.3 División de Números Naturales

### *Propiedades de la División:*

• *"En una igualdad, todo número que está en un miembro como factor, se puede pasar al otro miembro como divisor, y recíprocamente".*

*En símbolos:* $\frac{D}{d} = c \Leftrightarrow D = cd$

*Ejemplo:* $\frac{6 \times 4}{3} = 8 \Leftrightarrow 6 \times 4 = 8 \times 3$

• *"Dividiendo miembro a miembro dos igualdades, se obtiene otra igualdad".*

*En símbolos:*

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si} \quad a = b \\ \text{y} \quad c = d \end{array}\right\} \text{es} \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

• *"El cociente de una suma algebraica de varios múltiplos de un número por ése número, es igual a la suma algebraica de los cocientes que se obtienen dividiendo cada término de la suma por dicho número".*

*En símbolos:* $\dfrac{(a+b-c)}{n} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n} + \dfrac{c}{n}$ *(si a, b y c múltiplos de n)*

*Ejemplo:* $\dfrac{(32+24-16)}{8} = \dfrac{32}{8} + \dfrac{24}{8} - \dfrac{16}{8}$

• *"El cociente no altera si se multiplican el dividendo o el divisor por un mismo número".*

*En símbolos:* si $\dfrac{a}{b} = c$ es $\dfrac{an}{bn} = c$ y $\dfrac{\frac{a}{n}}{\frac{b}{n}} = c$

• *"Para dividir el producto de varios factores por uno de ellos, basta con suprimir ese factor en el producto dado".*

*En símbolos:* $\dfrac{abxc}{x} = abc$

• *"Un número que aparece en ambos miembros de una igualdad como divisor o como* factor, *puede suprimirse".*

*Ejemplos:* 5 x 4 x 12 = 30 x 2 x 4 $\Rightarrow$ 5 x 12 = 30 x 2

$\dfrac{20 \times 9}{3} = \dfrac{30 \times 6}{3}$ $\Rightarrow$ 20 x 9 = 30 x 6

$\dfrac{8 \times 5 \times 6}{12} = \dfrac{4 \times 10 \times 6}{12}$ $\Rightarrow$ 8 x 5 = 4 x 10

• Cuando tenemos el siguiente caso: [(a:b):(c:d)], se procede como se indica a continuación: $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a \times d}{b \times c}$

*(el producto de los extremos dividido el producto de los medios)*

## *Simplificaciones:*

• Cuando se trata de simplificar una igualdad es conveniente proceder así: 1º, se efectúan todas las simplificaciones posibles en el primer miembro; 2º, ídem en el segundo miembro; 3º, ídem entre el primero y segundo miembro.

*En el ejemplo:* $\dfrac{3abx}{4az} = \dfrac{bmn}{4m}$

*al efectuar las simplificaciones coloreadas a continuación:* $\dfrac{3abx}{4az} = \dfrac{bmn}{4m}$

*queda:* $\dfrac{3x}{z} = n$

- En el siguiente ejemplo: $\dfrac{15\times 7}{11\times 18}$ se tiene que: $\dfrac{15\times 7}{11\times 18} = \dfrac{3\times 5\times 7}{11\times 3\times 6} = \dfrac{5\times 7}{11\times 6}$

Esta simplificación se puede hacer directamente dividiendo el *número 15* y el *número 18* por el *divisor común 3* y escribiendo en su lugar los *cocientes respectivos*.

- En la expresión: $\dfrac{12\times 35\times 11}{25\times 8}$ se pueden simplificar *12 y 8 por 4* y *35 y 25 por 5*:

$$\frac{\overset{3}{\cancel{12}}\times \overset{7}{\cancel{35}}\times 11}{\underset{5}{\cancel{25}}\times \underset{2}{\cancel{8}}} = \frac{3\times 7\times 11}{5\times 2}$$

- Análogamente, en la expresión: 30 x 8 = 35m $\Rightarrow$ $\overset{6}{\cancel{30}}$ x 8 = $\overset{7}{\cancel{35}}$m $\Rightarrow$ 6 x 8 = 7m

## *Problemas:*

Problema Nº 10: En los ejercicios siguientes pasar *2*, *a* y *b* del primer miembro al segundo, y *3*, x, z y n del segundo miembro al primero:

1. $\dfrac{2am}{5bk} = \dfrac{7xz}{3nc}$  2. $\dfrac{11m}{2ab} = \dfrac{8nx}{z}$  3. $\dfrac{b}{2pqa} = \dfrac{1}{3xzn}$

Problema Nº 11: Efectuar las simplificaciones posibles en los siguientes ejercicios:

1. $15z \times 8y \times 4 \times 35 = 2y \times 16z \times 7 \times 75$
2. $\dfrac{15mn\times 6m\times 4}{4mn\times 9}$ = 5 x 2m
3. $\dfrac{12a\times 14bc\times 25x}{30bz\times 5xay\times 49k} = \dfrac{5m\times 4nc}{14mk}$
4. $\dfrac{27axb\times 16mn\times 10}{9m\times 4a\times 5xz} = \dfrac{36np\times 6y}{6zpy}$

Problema Nº 12: Efectuar todas las simplificaciones posibles y calcular luego el valor de y en las expresiones siguientes:

1. $2a \times 4y \times 5m \times 3b = 2m \times 3a \times 5b \times 20$
2. $\dfrac{9abc\times 2xy}{9a} = \dfrac{4x\times 2nbc}{n}$
3. $\dfrac{9\times 4y\times 2a}{9a\times 5} = \dfrac{16}{5}$

Problema Nº 13: Resolver los siguientes ejercicios:

1. $\dfrac{18x - 6y - 30z + 12a - 6}{6}$
2. $\dfrac{10n + 15mn + 5an + 25nx + 50n}{5n}$

3. $\dfrac{7ab + bx - 14bc - 9b + 5by}{b}$

4. $\dfrac{xy + 4nx + ax + 13x + 9xz}{x}$

## 5.4 Potenciación de Números Naturales

### Propiedades de la Potenciación:

• *"La potencia enésima de un producto es igual al producto de las potencias enésimas de cada uno de los factores"*. Recíprocamente: *"El producto de potencias de igual grado, es igual al producto de las bases elevado al mismo exponente"*.

*En símbolos:*

$$(abc)^n = a^n \times b^n \times c^n \quad ; \quad a^n \times b^n \times c^n = (abc)^n$$

*Ejemplos:*

$$(5 \times 6 \times 9)^4 = 5^4 \times 6^4 \times 9^4 \quad ; \quad 2^3 \times 5^3 \times 7^3 = (2 \times 5 \times 7)^3$$

• *"La potencia enésima de un cociente es igual a la potencia enésima del dividendo, dividida por la potencia enésima del divisor"*. Recíprocamente: *"El cociente de dos potencias de igual exponente, es igual al cociente de las bases elevado al mismo exponente"*.

*En símbolos:* $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n} \quad ; \quad \dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

*Ejemplos:* $\left(\dfrac{10}{2}\right)^3 = \dfrac{10^3}{2^3} \quad ; \quad \dfrac{10^6}{5^6} = \left(\dfrac{10}{5}\right)^6$

• "El producto de potencias de igual base es otra potencia de la misma base, cuyo exponente es la suma de los exponentes de las potencias dadas".

*En símbolos:* $a^x \times a^y \times a^z = a^{(x+y+z)}$

*Ejemplo:* $5^2 \times 5 \times 5^4 = 5^{(2+1+4)}$

• *"El cociente de dos potencias de igual base es otra potencia de la misma base, cuyo exponente es igual al exponente del dividendo menos el exponente del divisor"*.

*En símbolos:* $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{(x-y)}$ ; *Ejemplo:* $\dfrac{4^7}{4^2} = 4^{(7-2)}$

• *"Toda potencia de una potencia es igual a otra potencia de la misma base, cuyo exponente es el producto de los exponentes dados"*.

*En símbolos:* $(a^x)^y = a^{xy}$ ; *Ejemplo:* $(5^2)^4 = 5^{2\times 4}$

• *"El cuadrado de la suma de dos números es igual al cuadrado del primer número, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo".*

*En símbolos:* $(a + b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2$

*Ejemplo:* $(5 + 3)^2 = 5^2 + 2.5.3 + 3^2$

• *"La potencia cero de un número cualquiera distinto de cero, es igual a uno".*

*En símbolos:* $a^0 = 1$ ; *Ejemplo:* $27^0 = 1$

### Problemas:

Problema Nº 14: Efectuar las siguientes potencias, aplicando las propiedades correspondientes:

1. $(5 \times 2 \times 9)^3$ ; 2. $(1 \times 3 \times 4 \times 2)^5$

3.- $\left(\frac{36}{12}\right)^2$ ; 4. $\left(\frac{8}{2}\right)^3$

Problema Nº 15: Efectuar los siguientes productos y cocientes, aplicando las reglas correspondientes:

1. $11^2 \times 11^3$ ; 2. $2 \times 2^4 \times 2^5 \times 2^3 \times 2^6$ ; 3. $10^6 \times 10 \times 10^5 \times 10^4$

4. $\frac{3^8}{3^6}$ ; 5. $\frac{36^3}{9^3}$ ; 6. $\frac{8^4}{2^4}$

Problema Nº 16: Efectuar las siguientes potencias de potencias:

1. $(3^2)^3$ ; 2. $(2x^3)^2$ ; 3. $(4n^3x)^2$

4. $[(7^3)^0]^5$ ; 5. $[(5^5)^2]^3$ ; 6. $[(9^2)^2]^2$

Problema Nº 17: Efectuar las siguientes potencias:

1. $(4a.36.5x)^2$ ; 2. $(z^4.3y^2.4mn^2.2a)^3$

3. $\left(\frac{4a^2x}{2ax}\right)^3$ ; 4. $\left(\frac{48m^3p^2}{12m^2p}\right)^2$

Problema Nº 18: Calcular los cuadrados siguientes:

1. $(3 + a)^2$ 2. $(5x + 3y)^2$ 3. $(5m^2z + 4m^3az)^2$

## 5.5 Radicación de Números Naturales

### Propiedades de la Radicación

• *"Si a un número se lo eleva a la potencia enésima y al resultado se le extrae la raíz enésima, se obtiene el primer número".*

*En símbolos:* $\sqrt[n]{a^n} = a$ ; *Ejemplo:* $\sqrt[4]{15^4} = 15$

- *"Cuando un miembro de una igualdad está afectado por la raíz enésima, puede suprimirse dicha raíz elevando el otro miembro a la potencia enésima".* Recíprocamente: *"Cuando un miembro de una igualdad está elevado a un exponente n, se puede suprimir dicho exponente extrayendo la raíz de índice n del otro miembro".*

*En símbolos:* si $\sqrt[n]{a} = x$ se verifica: $a = x^n$

si $x^n = a$ se verifica: $x = \sqrt[n]{a}$

Ejemplos: $\sqrt[5]{2a^2b} = x \Rightarrow 2a^2b = x^5$

$(5x^2y)^4 = a \Rightarrow 5x^2y = \sqrt[4]{a}$

- *"La raíz enésima de un producto es igual al producto de la raíz enésima de cada factor".*

*En símbolos:* $\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{c}$

*Ejemplo:* $\sqrt[6]{36ab^2c^4} = \sqrt[6]{36}\,.\,\sqrt[6]{a}\,.\,\sqrt[6]{b^2}\,.\,\sqrt[6]{c^4}$

- *"La raíz enésima de un cociente es igual a la raíz enésima del dividendo dividida por la raíz enésima del divisor".* Recíprocamente: *"El cociente de raíces de igual índice, es otra raíz del mismo índice, cuyo radicando es el cociente entre el radicando del dividendo y el radicando del divisor".*

*En símbolos:* $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ; $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

*Ejemplos:* $\sqrt[3]{\frac{27a^2b^3}{8x^3}} = \frac{\sqrt[3]{27a^2b^3}}{\sqrt[3]{8x^3}}$ ; $\frac{\sqrt[4]{64}}{\sqrt[4]{16}} = \sqrt[4]{\frac{64}{16}}$

## ◆ *Problemas:*

Problema Nº 19: Simplificar las siguientes expresiones:

1. $(\sqrt{5})^2\,(\sqrt[3]{10})^3$
2. $4y\,(\sqrt{5})^2\,\sqrt[4]{x^8} = 3$
3. $\sqrt{a^4}\;2n\,\sqrt{7^6}\;\sqrt{b^2} = 4n$

Problema Nº 20: Efectuar las simplificaciones posibles y hallar el valor de x en las expresiones siguientes:

1. $y^3\,2x\,(\sqrt[5]{3})^5 = \sqrt[3]{y^9}\,.12$

2. $\sqrt[3]{x^6}\,.\,4mx\,(\sqrt{2})^2 \;=\; (\sqrt[3]{64})^3\,.\,mx^2$

Problema Nº 21: Hallar las siguientes raíces:

1. $\sqrt{12 \times 3}$ ; 2. $\sqrt[4]{27 \times 3}$ ; 3. $\sqrt{2 \times 8}$

4. $\sqrt[3]{\dfrac{128}{2}}$ ; 5. $\sqrt{\dfrac{75}{3}}$ ; 6. $\sqrt[4]{\dfrac{80}{5}}$

Problema Nº 22: Hallar las siguientes raíces, aplicando la propiedad correspondiente:

1. $\sqrt{49\,m^4\,n^2\,b^6}$ ; 2. $\sqrt[5]{32\,a^{10}\,m^5\,c^{30}\,d^{15}}$

3. $\sqrt{\dfrac{64\,a^2\,b^4}{16\,a^2\,b^6}}$ ; 4. $\sqrt[4]{\dfrac{a^{16}\,x^8\,c^{12}}{b^4\,z^8\,y^{24}}}$

Problema Nº 23: Efectuar los siguientes productos y cocientes:

1. $\sqrt[3]{32}\,.\,\sqrt[3]{2}$ ; 2. $\sqrt[5]{16}\,.\,\sqrt[5]{2}$ ; 3. $\sqrt[4]{9}\,.\,\sqrt[4]{9}$

4. $\dfrac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}$ ; 5. $\dfrac{\sqrt[3]{270}}{\sqrt[3]{10}}$ ; 6. $\dfrac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$

7. $\sqrt{25\,a^2\,b^4\,c}\,.\,\sqrt{a^4\,c}$ ; 8. $\sqrt[5]{16\,a^4\,b^2\,x}\,.\,\sqrt[5]{2\,a\,b^8\,x^4}$

9. $\dfrac{\sqrt{28\,x^5\,y^8\,z^3}}{\sqrt{7\,x\,y^4\,z}}$ ; 10. $\dfrac{\sqrt[3]{108\,m^4\,y^7\,n^6}}{\sqrt[3]{4\,m\,y^4\,n^3}}$

Problema Nº 24: Hallar el valor de $x$ tal que verifique las siguientes igualdades:

1. $\sqrt{x} = 9$ ; 2. $\sqrt[3]{x} = 4$ ; 3. $\sqrt[4]{x} = 3$ ; 4. $\sqrt[5]{x} = 2$

## 5.6 Divisibilidad

### *Criterios de Divisibilidad:*

- Un número es divisible por 10 si termina en cero.
- Un número es divisible por 100 si termina en 2 ceros.
- Un número es divisible por 1000 si termina en 3 ceros, etc.
- Un número es divisible por 2 si la cifra de las unidades es par.
- Un número es divisible por 5 si la cifra de las unidades es 0 ó 5.
- Un número es divisible por 3 si la suma de todas sus cifras es múltiplo de 3.
- Un número es divisible por 9 si la suma de todas sus cifras es múltiplo de 9.
- Un número es divisible por 4 si el número formado por sus 2 últimas cifras es múltiplo de 4.
- Un número es divisible por 25 si el número formado por sus 2 últimas cifras es múltiplo de 25.

- Un número es divisible por 8 si el número formado por sus 3 últimas cifras es múltiplo de 8.
- Un número es divisible por 11 si la diferencia entre la suma de las cifras de los lugares pares y la suma de las cifras de los lugares impares es múltiplo de 11.

## *Números Primos y Compuestos:*

• *"Un número natural es primo cuando es divisible únicamente por sí mismo y por la unidad".*

*Ejemplo:* Son números primos: 1, 2, 3, 5, 7, . . . , 23, 29, . . . , 109, etc.

• "Un número natural es compuesto cuando admite algún divisor distinto de sí mismo y de la unidad".

*Ejemplo:* 48 es compuesto porque admite divisores distintos de 1 y 48: 2, 4, 6, etc.

## *Descomposición de un Número Compuesto en sus Factores Primos:*

Sea el número 120. Se dispone como se observa en el cuadro de la derecha y se divide sucesivamente por el *menor número primo* posible.

| | |
|---|---|
| 120 | 2 |
| 60 | 2 |
| 30 | 2 |
| 15 | 3 |
| 5 | 5 |
| 1 | |

Así resulta: $120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3 \times 5$

Queda así expresado el número 120 como *producto de factores primos*.

Para cada número, esta descomposición es única.

## *Máximo Común Divisor:*

• *"Se llama máximo común divisor de dos o más números al mayor de los divisores comunes a esos números".*

*Ejemplos:*

El máximo común divisor de 54 y 90 es 18. Se indica: MCD (54 y 90) = 18

El máximo común divisor de 18, 24 y 36 es 6. Se indica: MCD (18, 24 y 36) = 6

• El cálculo del máximo común divisor de varios números se realiza mediante la descomposición en sus factores primos. El procedimiento es el siguiente:

"Se descompone cada uno de los números en sus factores primos. El producto formado por los factores comunes considerados con su menor exponente, es el máximo común divisor de los números dados".

*Ejemplos anteriores:*

a) $54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^3$

$90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2 \times 3^2 \times 5$

$MCD = 2 \times 3^2 = 18$

b) $18 = 2 \times 3^2$ ; $24 = 2^3 \times 3$ ; $36 = 2^2 \times 3^2$ ; $MCD = 2 \times 3 = 6$

*Ejemplo con números más grandes:*

| | |
|---|---|
| 2520 | 2 |
| 1260 | 2 |
| 630 | 2 |
| 315 | 3 |
| 105 | 3 |
| 35 | 5 |
| 7 | 7 |
| 1 | |

| | |
|---|---|
| 720 | 2 |
| 360 | 2 |
| 180 | 2 |
| 90 | 2 |
| 45 | 3 |
| 15 | 3 |
| 5 | 5 |
| 1 | |

| | |
|---|---|
| 540 | 2 |
| 270 | 2 |
| 135 | 3 |
| 45 | 3 |
| 15 | 3 |
| 5 | 5 |
| 1 | |

2.520 = $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$

720 = $2^4 \times 3^2 \times 5$

540 = $2^2 \times 3^3 \times 5$

MCD = $2^2 \times 3^2 \times 5$ = 180

## *Mínimo Común Múltiplo:*

● *"Se llama mínimo común múltiplo de dos o más números, al menor de los múltiplos comunes a esos números"* *(el menor divisible por todos)*.

*Ejemplo:*

El mínimo común múltiplo de 12, 15 y 10 es 60. Se indica: MCM (12, 15 y 10) = 60

● El procedimiento para el cálculo del mínimo común múltiplo es el siguiente:

"Se descompone cada uno de los números en sus factores primos. El producto formado por los factores comunes y no comunes, con su mayor exponente, es el mínimo común múltiplo de los números dados".

*Ejemplo anterior:*

$12 = 2^2 \times 3$ ; $15 = 3 \times 5$ ; $10 = 2 \times 5$ ; MCM = $2^2 \times 3 \times 5 = 60$

*Ejemplo con números más grandes:*

| | |
|---|---|
| 2970 | 2 |
| 1485 | 3 |
| 495 | 3 |
| 165 | 3 |
| 55 | 5 |
| 11 | 11 |
| 1 | |

| | |
|---|---|
| 504 | 2 |
| 252 | 2 |
| 126 | 2 |
| 63 | 3 |
| 21 | 3 |
| 7 | 7 |
| 1 | |

| | |
|---|---|
| 180 | 2 |
| 90 | 2 |
| 45 | 3 |
| 15 | 3 |
| 5 | 5 |
| 1 | |

2.970 = $2 \times 3^3 \times 5 \times 11$

504 = $2^3 \times 3^2 \times 7$

180 = $2^2 \times 3^2 \times 5$

MCM = $2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11$ = 83.160

## *Problemas:*

Problema Nº 25: Calcular el MCD y el MCM de los números siguientes, mediante la descomposición en factores primos. Determinar el cociente entre cada número y el MCD y el cociente entre el MCM y cada número:

1. 1.320, 900 y 1.260 ; 2. 4.536, 684, 5.184 y 1.728
3. 90, 315, 225, 405 y 450 ; 4. 84, 189, 210 y 105

Problema Nº 26: Se desean repartir 180 libros, 240 juguetes y 360 golosinas entre un cierto número de niños, de tal modo que cada uno reciba un número exacto de cada elemento. ¿Cuál es el mayor número de niños que puede beneficiarse en ésa forma?

*Respuesta: 60 niños*.

Problema Nº 27: Cuatro buques parten para el mismo destino: el primero, cada 10 días; el segundo, cada ocho; el tercero, cada 9; el cuarto, cada 15. ¿Cuántos días transcurren entre dos salidas simultáneas *(los 4 buques el mismo día)* consecutivas?

*Respuesta: 360 días.*

## 5.7 Operaciones con Números Enteros

### *Generalidades:*

Los *números naturales* y los *números enteros negativos* constituyen en conjunto los *NÚMEROS ENTEROS*. A los *números naturales*, excluido el cero, se los llama también *números enteros positivos*.

*En las operaciones con números naturales es imposible resolver una diferencia en la que el minuendo sea menor que el sustraendo. Para resolver esta clase de diferencias, se crearon los números enteros negativos, que se representan por los naturales precedidos por el signo menos. Veremos que las operaciones realizadas con estos nuevos números, gozan de las mismas propiedades que las correspondientes operaciones con números naturales.*

- *"Se llama valor absoluto de un número entero al número natural que lo representa, independientemente del signo".*

*Ejemplos:*

$$\text{Valor absoluto de } -3 \text{ es : } |-3| = 3$$

$$\text{Valor absoluto de } +8 \text{ es : } |+8| = 8$$

### *Adición de Números Enteros:*

- *"La suma de varios números enteros de igual signo es otro número entero del mismo signo, cuyo valor absoluto es la suma de los valores absolutos de los sumandos".*

*En símbolos:* $(-m) + (-n) + (-x) = -(m + n + x)$

$(+a) + (+b) + (+c) = +(a + b + c)$

*Ejemplos:* $(-9) + (-2) + (-5) + (-1) = -(9 + 2 + 5 + 1) = -17$

$(+8) + (+2) + (+3) + (+5) = +(8 + 2 + 3 + 5) = +18$

- "La suma de dos números enteros de distinto signo es otro número entero, cuyo valor absoluto es la diferencia de los valores absolutos de los sumandos y cuyo signo es el del sumando de mayor valor absoluto".

*Ejemplo:* $(-28) + (+3) = -(28 - 3) = -25$

- Para sumar varios números enteros positivos y negativos se puede emplear cualquiera de los siguientes procedimientos: a) *Efectuar la suma término a término*; b) *Sumar los sumandos positivos por una parte y los negativos por otra, luego sumar ambos resultados*.

*Ejemplo del segundo procedimiento:* $(-4) + (+7) + (+9) + (-2) + (-1) =$

$$= [(+7) + (+9)] + [(-4) + (-2) + (-1)] = (+16) + (-7) = +9$$

*Observación:*

En la práctica, se escriben los sumandos uno a continuación del otro con su correspondiente signo, es decir, se suprimen los paréntesis y los signos más que los separan. En el ejemplo anterior, quedaría:

$$-4 + 7 + 9 - 2 - 1 = (7+9) - (4 + 2 + 1) = 16 - 7 = 9$$

*Otro ejemplo:* $5 - 3 - 8 + 1 - 6 = (5 + 1) - (3 + 8 + 6) = 6 - 17 = -11$

## Multiplicación de Números Enteros:

- *"El producto de dos números enteros distintos de cero, es otro número entero cuyo valor absoluto es el producto de los valores absolutos de los factores y cuyo signo es más o menos, según que los factores tengan igual o distinto signo"*.

*Ejemplos:* $(-7)(-2) = 14$ ; $(-5)\,4 = -20$

$2 \times 5 = 10$ ; $3\,(-2) = -6$

La *REGLA DE LOS SIGNOS* contenida en la definición anterior se expresa simbólicamente:

$+ \,.\, +$ es $+$ *(más por más es más)*

$- \,.\, -$ es $+$ *(menos por menos es más)*

$- \,.\, +$ es $-$ *(menos por más es menos)*

$+ \,.\, -$ es $-$ *(más por menos es menos)*

*(cuando uno de los factores es cero el producto es igual a cero)*

- *"El producto de varios números enteros distintos de cero, es otro número entero cuyo valor absoluto es el producto de los valores absolutos de los números dados y cuyo signo es más si hay un número par de factores negativos, y es menos si hay un número impar de factores negativos"*.

*Ejemplos:* $(-5)\,2\,(-1)\,(-10)\,(-3) = 5 \times 2 \times 1 \times 10 \times 3 = 300$

$$(-2)(-1)\,2\,(-3)(-5)(-4) = -(2 \times 1 \times 2 \times 3 \times 5 \times 4) = -240$$

## División de Números Enteros:

- *"El cociente entre dos números enteros distintos de cero, es otro número entero cuyo valor absoluto es el cociente que resulta de dividir el valor absoluto del dividendo* *por el del divisor, y cuyo signo es más o menos, según que el dividendo y el divisor tengan igual o distinto signo".*

*Ejemplos:* $\frac{-45}{9} = -\frac{45}{9} = -5$ ; $\frac{36}{-12} = -\frac{36}{12} = -3$ ; $\frac{-81}{-9} = \frac{81}{9} = 9$

*NOTA: La regla de los signos resulta igual que para la multiplicación, si ponemos "dividido" en lugar de "por".*

## Potenciación de Números Enteros:

• *"La potencia enésima de un número entero es otro número entero cuyo valor absoluto es la potencia enésima del valor absoluto del número dado y cuyo signo se determina con la regla de los signos".*

*Ejemplos:* $(-10)^3 = -10^3 = -1000$ ; $(-2)^6 = 2^6 = 64$

$(-5)^4 = 5^4 = 625$ ; $(-7)^3 = -7^3 = -343$

*REGLA DE LOS SIGNOS: a) toda potencia de exponente par es positiva; b) toda potencia de exponente impar tiene el signo de la base.*

Como $a^1 = a \Rightarrow (-5)^1 = -5$ ; Como $a^0 = 1 \Rightarrow (-4)^0 = 1$

• *Cuadrado de la diferencia de dos números:*

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

• *Producto de la suma por la diferencia de dos números:*

$$(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2$$

## Radicación de Números Enteros:

• *"La raíz enésima de un número entero es otro número entero cuyo valor absoluto es la raíz enésima del valor absoluto del radicando y cuyo signo se determina de acuerdo con la regla de los signos de la radicación".*

*REGLA DE LOS SIGNOS:*

a) *Las raíces de índice par y radicando positivo, tienen dos resultados que son de igual valor absoluto y distinto signo.*

*Ejemplos:* $\sqrt[4]{16} = +2$ y $-2$ ; $\sqrt{25} = +5$ y $-5$

b) *Las raíces de índice impar y radicando positivo* ($\sqrt[3]{a}$), *tienen un solo resultado positivo. Ejemplo:* $\sqrt[5]{243} = +3$

c) *Las raíces de índice impar y radicando negativo* ($\sqrt[3]{-a}$), *tienen un solo resultado negativo. Ejemplo:* $\sqrt[5]{-32} = -2$

• $\sqrt[4]{-81} \Rightarrow$ No tiene solución en el conjunto de los números enteros, pues ningún número entero elevado a la cuarta potencia da por resultado un número negativo. Como consecuencia: *"Toda raíz de índice par y radicando negativo carece de solución en el conjunto de los números enteros".*

## Problemas:

Problema Nº 28: Suprimir paréntesis, corchetes y llaves y hallar el resultado:

1. $-4+(-2+1)+5-[3-(1-2)+4]+1-2$ Respuesta: $-9$
2. $-2+[-3-(-4+2)-1+7-\{-3-1-[2-(3-5)]\}-5$ Respuesta: 6
3. $-18+\{-2-[9-3+(-5-1)]+11\}-6$ Respuesta: $-6$

Problema Nº 29: Calcular los siguientes productos:

1. $(-a+b-c-x+7)(-3)$
2. $(-5x+2y-4x-5y-3x)(-2)$

Problema Nº 30: Multiplicar las sumas algebraicas siguientes:

1. $(3-a+2-b-1+c)(-2+x-y)$
2. $(2a-3b)(4c-7d+5)$

Problema Nº 31: Calcular los siguientes cocientes:

1. $\dfrac{12x-24y-36z}{6}$ ; 2. $\dfrac{4x-36m-16n}{-4}$

Problema Nº 32: Sacar factor común en las siguientes expresiones:

1. $8a-4b+12-4+16c$ *(sacar factor común – 4)*
2. $-4n-8an+10nb-6n+2n$ *(sacar factor común – 2n)*

Problema Nº 33: Hallar las siguientes potencias:

1. $(-5)^2$ ; 2. $(-7)^4$ ; 3. $(-3)^5$ ; 4. $(-x^2)^5$ ; 5. $(-x^2y^3z)^4$

Problema Nº 34: Aplicando la propiedad correspondiente, hallar las siguientes potencias:

1. $[(-2)\,a\,(-1)\,b]^4$ ; 2. $[(-3x)(-a)(-5)]^8$

Problema Nº 35: Calcular los siguientes productos de potencias de igual base:

1. $(-3x)^2(-3x)^5(-3x)^4$ ; 2. $(-3a^2b^3)^3(-3a^2b^3)^2(-3a^2b^3)$

Problema Nº 36: Hallar las siguientes potencias de potencias:

1. $[(-4)^2]^2$ ; 2. $\{[(-1)^2]^3\}^5$ ; 3. $[(-5x)^3]^2$

Problema Nº 37: Obtener los siguientes cocientes de potencias de igual base:

1. $\dfrac{(-3)^7}{(-3)^4}$ ; 2. $\dfrac{(9z)^9}{(9z)^6}$ ; 3. $\dfrac{(-4m)^5}{(-4m)}$

Problema Nº 38: Aplicando la propiedad correspondiente, hallar las siguientes potencias:

1. $\left(\frac{-10x}{5x}\right)^3$ ; 2. $\left(\frac{39}{-13}\right)^5$ ; 3. $\left(\frac{-12x^5}{-6x^2}\right)^3$

Problema Nº 39: Calcular las siguientes raíces:

1. $\sqrt[3]{-64}$ ; 2. $\sqrt[5]{-1}$ ; 3. $\sqrt[3]{-27}$ ; 4. $\sqrt[3]{-1000}$

Problema Nª 40: Hallar el valor de x en los ejercicios siguientes:

1. $\sqrt{x} = 5$ ; 2. $\sqrt{x} = -3$ ; 3. $\sqrt[7]{x} = -1$ ; 4. $\sqrt[3]{x} = -5$

Problema Nº 40: Aplicando la propiedad correspondiente, calcular las siguientes raíces:

1. $\sqrt[5]{-32a^5}$ ; 2. $\sqrt[3]{-64a^3x^3}$ ; 3. $\sqrt{64a^2b^2}$ ; 4. $\sqrt{16x^8}$

Problema Nº 41: Hallar las siguientes raíces:

1. $\sqrt[3]{\frac{1000}{-8}}$ ; 2. $\sqrt[5]{\frac{-32}{-1}}$ ; 3. $\sqrt[3]{\frac{-64}{8}}$

Problema Nº 42: Aplicando las propiedades correspondientes, resolver los siguientes ejercicios:

1. $\sqrt{-12}\,.\sqrt{-3}$ ; 2. $\sqrt[4]{-9}\,.\sqrt[4]{9}\,.\sqrt[4]{-1}$ ; 3. $\sqrt[5]{-4}\,.\sqrt[5]{-4}\,.\sqrt[5]{-2}$

4. $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$ ; 5. $\frac{\sqrt[3]{-40}}{\sqrt[3]{5}}$ ; 6. $\frac{\sqrt[5]{-288}}{\sqrt[5]{9}}$ ; 7. $\frac{\sqrt[3]{-320}}{\sqrt[3]{-5}}$

## 5.8 Operaciones con Números Racionales

### Números Fraccionarios Puros:

*Así como fueron creados los números negativos, para hacer posible la sustracción en los casos en que el minuendo es menor que el sustraendo, también fue necesario crear los números fraccionarios puros para interpretar las divisiones en los casos en que el dividendo no es múltiplo del divisor.*

Para poder ubicarnos en la estructura general de los Números, veamos el esquema siguiente:

- NÚMEROS COMPLEJOS
  - REALES
    - RACIONALES
      - ENTEROS
        - POSITIVOS (Naturales)
        - CERO
        - NEGATIVOS
      - FRACCIONARIOS *(1)*
    - IRRACIONALES *(2)*
  - IMAGINARIOS *(3)*

*NOTA: En nuestro caso no veremos la parte en color rojo.*

*(1) Decimales finitos o infinitos periódicos.*
*(2) Decimales infinitos no periódicos. Pueden ser:*
*Algebraicos: raíces de ecuaciones algebraicas, como $\sqrt{2}$.*
*Trascendentes: como $\pi$ o la base e de los logaritmos.*
*(3) Raíz cuadrada de un número negativo, como $\sqrt{-2}$.*

• *"Se llama número fraccionario puro al cociente de dos números enteros, distintos de cero, tales que el dividendo no sea múltiplo del divisor".*

### Simplificación de Fracciones:

Para simplificar una fracción se dividen numerador y denominador por un divisor común. Esto implica que si los términos de la fracción son primos entre sí, la misma no puede simplificarse y entonces *es irreducible*. En tal caso se dice que la fracción se ha reducido a su *expresión más simple*.

Es evidente que para reducir una fracción a su expresión más simple, hay que dividir numerador y denominador por su *máximo común divisor*.

Sea reducir a su expresión más simple la fracción $\frac{60}{48}$ :

Siendo MCD de (60 y 48) = 12, resulta:

$$\frac{60}{48} = \frac{60\,/\,12}{48\,/\,12} = \frac{5}{4}$$

que es fracción irreducible, puesto que 5 y 4 son primos entre sí.

### Reducción de Fracciones a Mínimo Común Denominador:

• *"Para reducir fracciones a mínimo común denominador se forman otras tantas fracciones que tienen por denominador el MCM de los denominadores, y cuyos numeradores se obtienen, dividiendo el MCM por cada denominador y multiplicando este cociente por el numerador correspondiente".*

*Ejemplo:*

Sea reducir a mínimo común denominador: $\frac{2}{5}$ ; $\frac{1}{6}$ ; $\frac{7}{2}$

MCM de (5, 6 y 2) = 30

Como (30/5) = 6, es: $\frac{2}{5} = \frac{6\times 2}{30} = \frac{12}{30}$

Como (30/6) = 5, es: $\frac{1}{6} = \frac{5\times 1}{30} = \frac{5}{30}$

Como (30/2) = 15, es: $\frac{7}{2} = \frac{15\times 7}{30} = \frac{105}{30}$

### Suma o Resta de Fracciones de Distinto Denominador:

• *"Para sumar dos o más números fraccionarios de distinto denominador, se reducen previamente a mínimo común denominador". "Para restar dos números fraccionarios de distinto denominador, se reducen previamente a mínimo común denominador".*

*En el ejemplo anterior:*

$$\frac{2}{5}+\frac{1}{6}+\frac{7}{2}=\frac{12}{30}+\frac{5}{30}+\frac{105}{30}=\frac{12+5+105}{30}=\frac{122}{30}=\frac{61}{15}$$

*Otro ejemplo:*

$$-\frac{3}{5}+2+\left(-\frac{5}{3}\right)+\left(-\frac{2}{15}\right)=\frac{-9+30-25-2}{15}=-\frac{6}{15}=-\frac{2}{5}$$

(*el número entero 2 se considera como* $\frac{2}{1}$)

## Números Mixtos:

● *"Para transformar una fracción mayor que 1 en número mixto, se divide el numerador por el denominador. El cociente entero es la parte entera del número mixto y el resto sobre el divisor es la fracción".*

*Ejemplos:*

$$\frac{16}{3}=5\frac{1}{3} \quad \text{pues } 16/3=5 \text{ y resto } 1$$

$$-\frac{21}{8}=-2\frac{5}{8} \quad \text{pues } 21/8=2 \text{ y resto } 5$$

● *Ejemplo de reducción de número mixto a fraccionario:*

$$4\frac{2}{7}=\frac{28}{7}+\frac{2}{7}=\frac{30}{7}$$

● *Ejemplo de suma de números mixtos:*

$$5\frac{1}{2}-2\frac{3}{5}=5-2+\frac{1}{2}-\frac{3}{5}=3+\frac{5-6}{10}=3-\frac{1}{10}=\frac{30-1}{10}=\frac{29}{10}=2\frac{9}{10}$$

## Multiplicación de Números Racionales:

● *"El producto de dos o más fracciones es otra fracción cuyo signo se obtiene aplicando la regla de los signos de la multiplicación de números enteros, y cuyo valor absoluto tiene por numerador al producto de los numeradores y por denominador al producto de los denominadores de las fracciones dadas".*

*Ejemplos:*

$$\frac{5}{3}\times\frac{11}{7}\times\frac{1}{2}=\frac{5\times11\times1}{3\times7\times2}=\frac{55}{42}$$

$$\frac{1}{3}\left(-\frac{7}{9}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1\times7\times1}{3\times9\times2}=\frac{7}{54}$$

$$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{2\times4\times1}{3\times5\times3}=-\frac{8}{45}$$

$$\frac{8}{3}(-2)\frac{1}{5}=-\frac{8\times2\times1}{3\times5}=-\frac{16}{15}$$

• En los ejercicios de multiplicación es ventajoso *efectuar todas las simplificaciones posibles* entre numeradores y denominadores, antes de obtener el resultado final.

*En el siguiente ejemplo, se simplifica entre valores de igual color:*

$$\frac{105}{8}\times\frac{33}{35}\times\frac{15}{77}\times\frac{28}{27}=\frac{105}{8}\times\frac{33}{35}\times\frac{15}{77}\times\frac{28}{27}=\frac{21}{2}\times\frac{3}{7}\times\frac{5}{7}\times\frac{7}{9}=$$

$$\frac{21}{2}\times\frac{3}{7}\times\frac{5}{7}\times\frac{7}{9}=\frac{3}{2}\times\frac{1}{1}\times\frac{5}{1}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{2}\times\frac{1}{1}\times\frac{5}{1}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{2}$$

*Obviamente, esto se realiza en un solo paso y tachando sucesivamente.*

### *Números Racionales Recíprocos o Inversos:*

• *"Dos números racionales se dicen inversos o recíprocos cuando, teniendo el mismo signo, el numerador del primero es igual al denominador del segundo y, recíprocamente, el denominador del primero es igual al numerador del segundo".*

*Ejemplos:*

$$\frac{7}{5}\ \text{y}\ \frac{5}{7}\quad;\quad -\frac{1}{3}\ \text{y}\ -3\quad;\quad 2\ \text{y}\ \frac{1}{2}\quad;\quad -\frac{4}{3}\ \text{y}\ -\frac{3}{4}$$

• *El producto de dos números inversos es igual a la unidad:* $\frac{4}{9}\times\frac{9}{4}=1$

### *División de Números Racionales:*

*Veamos directamente un ejemplo:*

$$\frac{3}{7}:\frac{1}{2}=\frac{6}{7}\quad \text{pues}\quad \frac{6}{7}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{7}\quad \text{de donde}\quad \Rightarrow\quad \frac{3}{7}\times\frac{2}{1}=\frac{6}{7}$$

• Se observa que se llega al mismo resultado multiplicando el dividendo por el inverso del divisor. Entonces podemos enunciar: "Para obtener el cociente de un número racional por otro, se multiplica el dividendo por el inverso del divisor".

*Otro ejemplo:*

$$\frac{5}{8}:\frac{4}{3}=\frac{5}{8}\times\frac{3}{4}=\frac{15}{32}\quad\Rightarrow\quad\frac{5}{8}:\frac{4}{3}=\frac{\frac{5}{8}}{\frac{4}{3}}=\frac{5\times3}{8\times4}=\frac{15}{32}$$

(ver página 42)

### *Potenciación de Números Racionales:*

*En símbolos:* $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$ $\begin{cases}\text{Signo menos si el exponente es impar y la base negativa.}\\ \text{Signo más en todos los otros casos.}\end{cases}$

*Ejemplos:*

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{2^3}{3^3}=\frac{8}{27}\quad;\quad\left(-\frac{1}{3}\right)^5=-\frac{1^5}{3^5}=-\frac{1}{243}$$

$$\left(-\frac{1}{10}\right)^6=\frac{1^6}{10^6}=\frac{1}{1.000.000}\quad;\quad\left(\frac{4}{7}\right)^2=\frac{4^2}{7^2}=\frac{16}{49}$$

- *Producto de potencias de igual base*: $\left(\frac{a}{b}\right)^m . \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}$
- *Cociente de potencias de igual base*: $\left(\frac{a}{b}\right)^m : \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}$
- *Potencia de potencia*: $\left[\left(\frac{a}{b}\right)^n\right]^x = \left(\frac{a}{b}\right)^{nx}$
- *Potencia con exponente negativo*: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- *Producto de potencias de igual base c/exponente negativo*: $a^{-x}.a^{-y} = a^{-x-y}$
- *Cociente de potencias de igual base c/exponente negativo*: $a^{-x}:a^{-y} = a^{-x-(-y)}$
- *Potencia de potencia con exponentes negativos*: $(a^{-x})^{-y} = a^{(-x)(-y)}$

## *Radicación de Números Racionales:*

*En símbolos:* $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $\Rightarrow$ *Ver Regla de los Signos en página 52.*

*Nota: La Radicación de los Números Racionales conserva todas las propiedades vistas para la Radicación de los Números Enteros.*

## *Problemas:*

Problema Nº 43: Reducir a mínimo común denominador las siguientes fracciones:

1. $\frac{1}{6}$ ; $\frac{4}{9}$ ; $\frac{2}{3}$ ; $\frac{8}{15}$  2. $\frac{7}{13}$ ; $\frac{9}{130}$ ; $\frac{1}{15}$ ; $\frac{4}{65}$  3. $\frac{3}{10}$ ; $\frac{4}{30}$ ; $\frac{7}{60}$ ; $\frac{11}{15}$

Problema Nº 44: Sumar los siguientes números racionales, aplicando el mínimo común denominador:

1. $\frac{2}{7}$ ; $\frac{4}{9}$ ; $\frac{5}{14}$ ; $\frac{1}{6}$  2. $\frac{3}{11}$ ; $\frac{3}{2}$ ; $\frac{5}{7}$ ; $\frac{1}{22}$  3. $-\frac{4}{5}$ ; $-\frac{5}{6}$ ; $\frac{1}{3}$ ; $-\frac{1}{2}$

4. $-\frac{7}{9}$ ; $-1$ ; $2\frac{1}{6}$ ; $-\frac{2}{3}$ ; $5\,\frac{1}{2}$ ; $3\,\frac{1}{4}$ ; $\frac{5}{2}$

Problema Nº 45: Hallar las siguientes diferencias:

1. $\frac{7}{16} - \frac{9}{48}$ ; 2. $\frac{5}{9} - \frac{1}{2}$ ; 3. $2\,\frac{4}{15} - \frac{2}{3}$ ; 4. $9\,\frac{3}{7} - 2\,\frac{1}{2}$

Problema Nº 46: Restar los siguientes números:

1. de $-\frac{3}{7}$ restar $-\frac{5}{6}$ ; 2. de $\frac{5}{8}$ restar $-\frac{7}{12}$

Problema Nº 47: Verificar el resultado de la expresión siguiente:

$$\frac{5}{6}+\left[-\frac{1}{3}-1-\left(-\frac{3}{2}+1\frac{1}{3}-\frac{4}{9}\right)-2-\left(\frac{7}{18}-1+\frac{4}{9}\right)\right] \qquad Respuesta:\ -\frac{31}{18}$$

Problema Nº 48: Calcular los siguientes productos, efectuando previamente todas las simplificaciones posibles:

1. $\frac{9}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{27}\times\frac{5}{3}$ ; 2. $\frac{3}{10}\times\frac{2}{3}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{25}$ ; 3. $\left(-\frac{3}{4}\right)\frac{1}{2}\left(-\frac{5}{3}\right)\frac{8}{5}$

4. $\frac{360}{77}\left(-\frac{121}{5040}\right)\frac{12}{55}\left(-\frac{1000}{99}\right)\frac{343}{400}$ $\qquad Respuesta:\ \frac{7}{33}$

Problema Nº 49: Efectuar las siguientes divisiones:

1. $\frac{5}{18}:\frac{4}{9}$ ; 2. $\frac{63}{10}:\frac{7}{5}$ ; 3. $\left(-\frac{8}{5}\right):\frac{7}{3}$ ; 4. $\left(-\frac{3}{4}\right):\left(-\frac{1}{3}\right)$

Problema Nº 50: Simplificar las siguientes expresiones:

1. $\frac{24\,a^5\,b^7\,c^3}{40\,a^8\,b^4\,c^8}$ $\quad Rta:\ \frac{3b^3}{5a^3c^5}$ ; 2. $\frac{56a^3b^2\times 50c^5m\times 36x^4}{280\,m^4a\times 15b^5c^5x^9}$ $\quad Rta:\ \frac{24a^2}{b^3m^3x^5}$

Problema Nº 51: Hallar las siguientes potencias:

1. $\left(\frac{7}{8}\right)^2$ ; $\left(-\frac{5}{6}\right)^2$ ; $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$ ; $\left(-\frac{7}{9}\right)^1$ ; $\left(-\frac{5}{7}\right)^0$ ; $\left(-\frac{3}{10}\right)^5$

2. $(-4)^{-3}$ ; $\left(-\frac{1}{5}\right)^{-2}$ ; $\left(-\frac{2}{9}\right)^{-4}$ ; $\left(-\frac{c}{d}\right)^{-5}$ ; $\left(\frac{m}{n}\right)^{-7}$

Problema Nº 52: Calcular las siguientes raíces:

$\sqrt{\frac{9}{16}}$ ; $\sqrt{\frac{25}{64}}$ ; $\sqrt[3]{\frac{27}{64}}$ ; $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$ ; $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}}$

Problema Nº 53: Hallar los valores de a en los siguientes ejercicios:

$\sqrt{a}=\frac{9}{10}$ ; $\sqrt{a}=-\frac{3}{4}$ ; $\sqrt[3]{a}=-\frac{2}{5}$ ; $\sqrt[4]{a}=\frac{2}{3}$

## *Transformación de Expresiones Decimales Periódicas en Fracciones Ordinarias:*

• *Los colores rojo, azul y verde de las letras, indican la parte periódica:*

0,aaa… = a/9 >>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>> 0,33333 … = 3/9

0,ababab… = ab/99 >>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>> 0,373737 … = 37/99

0,abcabc… = abc/999 >>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>> 0,241241 … = 241/999

0,abcbcbc… = (abc – a)/990 >>>>>>>>>>> 0,8242424 ... = (824−8)/990

0,abccc… = (abc – ab)/900 >>>>>>>>>>>> 0,497777 ... = (497−49)/900

0,abcddd… = (abcd – abc)/9000 >>>>>>> 0,218111 ... = (2181−218)/9000

## 5.9 Notación Científica

• Se llama *Notación Científica* a la expresión de un número como *producto* de dos factores, uno de ellos *un número mayor que 1 y menor que 10*, y el otro una *potencia de 10*.

*Ejemplos:*

$$150.000.000.000 \Rightarrow 1,5 \times 10^{11}$$
$$9.500.000.000.000 \Rightarrow 9,5 \times 10^{12}$$
$$23.000.000 \Rightarrow 2,3 \times 10^{7}$$
$$369.000.000.000 \Rightarrow 3,69 \times 10^{11}$$

• Análogamente al ejemplo anterior, también resulta que todo *número decimal* puede escribirse como el producto de un *número mayor que 1 y menor que 10*, por una *potencia de 10 de exponente negativo*.

*Ejemplos:*

$$0,258 \Rightarrow 2,58 \times 10^{-1}$$
$$0,000\ 17 \Rightarrow 1,7 \times 10^{-4}$$
$$0,000\ 004 \Rightarrow 4 \times 10^{-6}$$
$$0,000\ 000\ 000\ 052\ 1 \Rightarrow 5,21 \times 10^{-11}$$
$$0,000\ 000\ 025 \Rightarrow 2,5 \times 10^{-8}$$
$$0,000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 911 \Rightarrow 9,11 \times 10^{-25}$$

## 5.10 Ecuaciones

• Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas, que se satisface solamente para algunos sistemas de valores asignados a sus letras. Por ejemplo, la ecuación $x^2 = 2x + 15$ sólo se satisface para $x = 5$ y para $x = -3$. Si se atribuye a $x$ cualquier otro valor que no sea $5$ o $-3$, la ecuación no se verifica.

### *Resolución de Ecuaciones de Primer Grado con una Incógnita:*

• La ecuación $4x + 5 = 3$ es de *primer grado*, pues la *incógnita x* figura únicamente elevada a la *primera potencia*. Los términos en que no figura la incógnita, se llaman *independientes*; pasándolos todos a un miembro y efectuando las operaciones, pueden reducirse a un solo término.

En el ejemplo anterior los términos independientes son 5 y 3. Pasando 5 al segundo miembro queda $4x = 3 - 5$, de donde $4x = -2$. Los dos términos independientes de la ecuación han quedado así reducidos a un solo término.

● A continuación veremos una *Regla Práctica* para resolver *Ecuaciones de Primer grado con una Incógnita*. *Ejemplo:* Resolver la siguiente ecuación:

$$3x - 2 = x + 6$$

Primero se reúnen todos los términos que contienen $x$ en el primer miembro y los términos independientes en el segundo:

$$3x - x = 6 + 2$$

Efectuando las operaciones: $2x = 8$

Pasando el factor 2 al segundo miembro, como divisor:

$$x = \frac{8}{2}$$

Es decir: $\underline{x = 4}$ . Luego 4 es la *raíz de la ecuación*.

Como las ecuaciones de primer grado con una incógnita *tienen una sola raíz*, la ecuación dada está resuelta.

● *Veamos otro ejemplo*: $5 - \frac{x}{3} = 2x + 19$

Pasando el término $2x$ al primer miembro para reunir los términos en $x$, y el término 5 al segundo para reunir los términos independientes, se tiene:

$$-\frac{x}{3} - 2x = 19 - 5$$

o sea: $\frac{-x - 6x}{3} = 14$ es decir: $\frac{-7x}{3} = 14$

Pasando el factor 7 y el divisor 3 al segundo miembro:

$$-x = \frac{14 \times 3}{7}$$ es decir: $-x = 6$

Multiplicando ambos miembros por (– 1), resulta: $\underline{x = -6}$

## *Problemas:*

Problema Nº 54: Resolver las siguientes ecuaciones.

1. $2x - 5 = 4x - 2$
2. $x - 9x + 5 = 2x + 3$
3. $2x - x + 3 - 4x + 9 = 39$
4. $2x + 14 - 9x = 6x - 12$

Rta. 1: $x = -\frac{2}{3}$ ; Rta. 2: $x = \frac{1}{5}$ ; Rta. 3: $x = -9$ ; Rta. 4: $x = 2$

## Resolución de Sistemas de dos Ecuaciones de Primer Grado con dos Incógnitas:

### A.- MÉTODO DE SUSTITUCIÓN:

- Se resume en los siguientes pasos:
  1. *Se despeja una de las incógnitas en una de las ecuaciones del sistema.*
  2. *Se sustituye en la otra ecuación dicha incógnita, por la expresión obtenida.*
  3. *Se resuelve la ecuación con una incógnita resultante.*
  4. *El valor obtenido para esta incógnita, se reemplaza en la primera ecuación. Luego se resuelve ésta despejando la otra incógnita.*

*Ejemplo:*

$$\begin{cases} 2x + y = 3 & (1) \\ \frac{3}{2}x - 2y = 5 & (2) \end{cases}$$

- PRIMER PASO:

Vemos que es más fácil despejar la $y$ en la ecuación (1):

$$y = 3 - 2x \qquad (3)$$

- SEGUNDO PASO:

Se reemplaza por esta expresión la $y$ de la ecuación (2):

$$\frac{3}{2}x - 2(3 - 2x) = 5$$

- TERCER PASO:

Se resuelve esta ecuación cuya incógnita única es $x$. Para ello, primero se efectúa la multiplicación indicada en el primer miembro y se tiene:

$$\frac{3}{2}x - 6 + 4x = 5$$

Se pasa $-6$ al segundo miembro: $\frac{3}{2}x + 4x = 5 + 6$

Se efectúan las sumas y se tiene: $\frac{11}{2}x = 11$

O sea: $x = \frac{11 \times 2}{11}$ de donde: $x = 2$

- CUARTO PASO:

Se sustituye $x$ por este valor 2, en la expresión (3) y se obtiene:

$$y = 3 - 2 \times 2 \quad \Rightarrow \quad y = 3 - 4 \quad \Rightarrow \quad \underline{y = -1}$$

Luego, La *solución del sistema* es: $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

### B.- MÉTODO DE IGUALACIÓN:

● Se resume en los siguientes pasos:

1. *Se despeja una de las incógnitas en las dos ecuaciones.*
2. *Se igualan las expresiones obtenidas.*
3. *Se resuelve la ecuación con una incógnita resultante.*
4. *El valor obtenido para esta incógnita, se reemplaza en cualquiera de las dos expresiones que resultaron al despejar la primera, y se obtiene así su valor.*

*Ejemplo:*

$$\begin{cases} x + 3\,y = 10 & (1) \\ 2\,x + \frac{5}{4}\,y = 1 & (2) \end{cases}$$

● PRIMER PASO:

Observamos que $x$ es la incógnita que se despeja más fácilmente en las dos ecuaciones. Se tiene así:

De (1) $\Rightarrow$ $x = 10 - 3\,y$ (3)

De (2) $\Rightarrow$ $2\,x = 1 - \frac{5}{4}\,y$ $\Rightarrow$ $x = (1 - \frac{5}{4}\,y)\,\frac{1}{2}$ (4)

● SEGUNDO PASO:

Se igualan los segundos miembros de (3) y (4):

$$10 - 3\,y = (1 - \frac{5}{4}\,y)\,\frac{1}{2}$$

● TERCER PASO:

Se resuelve la ecuación en $y$ que acabamos de obtener. Para ello pasamos el divisor $2$ al primer miembro:

$$(10 - 3\,y)\,2 = 1 - \frac{5}{4}\,y$$

Efectuamos la multiplicación indicada en el primer miembro. Luego reunimos los términos en $y$ en el primer miembro y los términos independientes en el segundo:

$$20 - 6\,y = 1 - \frac{5}{4}\,y \quad \Rightarrow \quad -6\,y + \frac{5}{4}\,y = 1 - 20$$

O sea: $-\frac{19}{4}\,y = -19$ de donde: $-y = \frac{(-19)\,4}{19}$ $\Rightarrow$ $-y = -4$

Luego: $\underline{y = 4}$

• CUARTO PASO:

Se sustituye y por su valor 4 en la expresión (3) o en la (4). En nuestro caso es más cómodo en la (3). Así resulta:

$$x = 10 - 3 \times 4 \qquad \Rightarrow \qquad x = 10 - 12$$

O sea: $x = -2$

Luego, La *solución del sistema* es: $\begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases}$

# BIBLIOGRAFÍA

ENCICLOPEDIA SALVAT DE CIENCIA Y TÉCNICA

ENCICLOPEDIA NAUTA DE LA TÉCNICA Y LA MECÁNICA

GEOMETRÍA I, II y III de Repetto, Linskens y Fesquet

ARITMÉTICA I, II y III de Repetto, Linskens y Fesquet

ÁLGEBRA de Repetto, Linskens y Fesquet

www.psicopedagogía.com/técnicas-de-estudio

Fuentes Varias de Internet