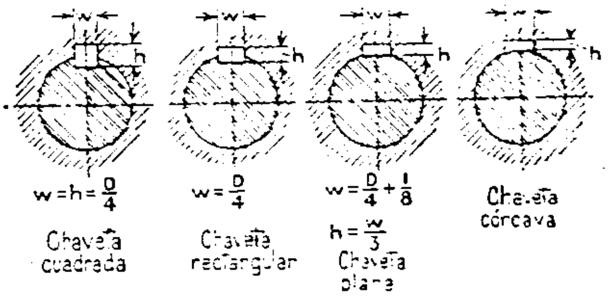
CHAVETAS LONGITUDINALES

Las poleas, engranajes, palancas, y elementos similares usados para transmitir potencia a un árbol (o desde un árbol), deben estar rígidamente fijados a los mismos por contracción, tornillos de fijación, chavetas longitudinales o, chavetas transversales. El ajuste forzado por contracción es conveniente solo para montajes permanentes, los tornillos de fijación para esfuerzos moderados y las chavetas, transversales para cargas axiales. Cuando deben desarmarse las piezas o cuando se trasmiten esfuerzos de torsión generalmente se, usan las chavetas longitudinales. La chaveta es una pieza de metal que encaja, en ranuras apareadas del árbol y del elemento acoplado, trasmitiéndose la potencia por el corte a través de, la misma. El tallado del chavetero en el eje, reduce su resistencia y rigidez en una magnitud que depende de la forma y tamaño del chavetero.

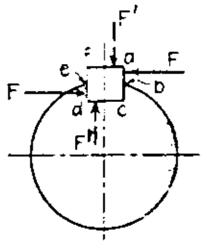


Tipos de chavetas longitudinales. La chaveta cuadrada, encajada mitad en el eje y mitad en el cubo, es el tipo mas comúnmente usado. Las chavetas rectangulares se usan en aquellos casos en que no conviene debilitar el eje. Aunque no hay una norma universal, la chaveta tiene usualmente sus lados iguales a ¼ del diámetro del eje. Las Figuras muestran algunos tipos de chavetas longitudinales. Las chavetas tangencial rectangular doble, tangencial cuadrada doble, se usan en grandes ejes para servicio pesado. Las chavetas redondas tienen la ventaja de que el chavetero puede ser perforado y escariado después de que están montadas las piezas apareadas. Las pequeñas chavetas, redondas se usan para fijar manivelas, volantes de mano y otras piezas, que no trasmiten grandes esfuerzos. Algunos fabricantes usan las chavetas redondas en ejes para servicio pesado mayores de 150 mm de diámetro, desde que la ausencia de esquinas en ambas piezas.

Las chavetas cóncavas se usan solamente para esfuerzos moderados o en los casos en que se necesita un movimiento relativo entre el eje y su cubo, no pudiendo hacerse un chavetero en ambas piezas. También se usan para unir piezas durante el montaje, hasta tanto pueda ubicarse y tallarse el chavetero definitivo.
Desde que la potencia se transmite por rozamiento, la cara externa o superior es inclinada, asegurando una gran presión radial.
Las lengüetas son chavetas rectas que se usan cuando debe haber un movimiento relativo axial entre el eje y el cubo.
La lengüeta se ajusta apretadamente y se fija en ya sea el eje o el cubo, proveyéndose un ajuste deslizante en el otro elemento. La presión superficial en las lengüetas no debe exceder 70 kg/cm^2, y si los elementos deben deslizarse bajo carga, la presión debe reducirse a menos de ese valor.
Las chavetas múltiples son chavetas permanentes construidas íntegramente con el eje y que ajustan en chaveteros (estrías), brochados en el cubo.

TENSIONES EN LAS CHAVETAS LONGITUDINALES

Cuando el chavetero se talla mitad en el eje y mitad en el cubo, la fuerza se transmite por compresión sobre las caras *ab* y *de*. Estas fuerzas de compresión actúan como una cupla que tiende a girar la chaveta, y si la chaveta ajusta en las cuatro caras, induce una cupla resistente que actúa sobre las caras *cd* y *af*, como indican las fuerzas señaladas con F'.
La fuerza de aplastamiento se halla aproximadamente considerando que la fuerza F actúa en la circunferencia del árbol.



$$F = \frac{2Mt}{D}$$

Mt: momento de torsión transmitido (kgcm)
D: diámetro del eje (cm)

La tensión de aplastamiento sobre las caras *ab* y *de*, vale:

$$\sigma_a = \frac{2F}{L.h} = \frac{4Mt}{D.L.h}$$

La tensión de corte sobre el área *eb*, vale:

$$\zeta_c = \frac{F}{L.\omega} = \frac{2Mt}{D.L.\omega}$$

La chaveta deberá ser igualmente resistente al aplastamiento y al corte, para satisfacer dicha condición despejamos *Mt*, en ambas ecuaciones e igualamos:

$$\frac{D.L.h.\sigma_c}{4} = \frac{D.L.\omega.\tau_c}{2}$$

de la cual:

$$\frac{h}{\omega} = \frac{2.\tau_c}{\sigma_c}$$

Cuando la chaveta ajusta en las cuatro caras, la tensión admisible al aplastamiento, para los materiales comunes de chavetas, vale, por lo menos dos veces la tensión admisible al corte. Cuando no ajusta en las cuatro caras, la tensión admisible al aplastamiento vale aproximadamente 1,7 veces la tensión admisible al corte.

Cuando la chaveta se hace del mismo material que el árbol, la longitud necesaria de la misma para transmitir toda la potencia del árbol, se determina igualando su resistencia al corte con la resistencia a la torsión del árbol; quedando:

$$\frac{2Mt}{D.L.\omega} = \frac{Mt.D}{2.Ip}.\frac{1}{0,75} = \frac{16Mt}{\pi.D^3}.\frac{1}{0,75}$$

$$Ip = \frac{Wp}{\frac{D}{2}}$$ Sí $\omega = 1,18D \Rightarrow L = 1,18.D$

o aproximadamente: $L = 1,2.D$

El valor 0,75 tiene en cuenta el debilitamiento del chavetero sobre la resistencia del eje.

ÁRBOLES Y EJES

Los árboles que transmiten potencia por torsión pueden dividirse en dos clases generales: árboles de trasmisión y árboles de máquina. Árboles de transmisión son aquellos que se usan para trasmitir la potencia entre la fuente y las máquinas que la absorben, y comprenden: Árboles de contramarcha, árboles principales y árboles secundarios. Árboles de maquina son aquellos que forman parte integral de la máquina misma.

Tensión en árboles

Los árboles pueden estar sometidos a esfuerzos de torsión, flexión, axiales, o a una combinación de ellos. Si el esfuerzo es de torsión la tensión preponderante inducida será tangencial; si el esfuerzo es de flexión las tensiones preponderantes serán tracción y compresión. Cuando un árbol está sujeto a una combinación de esfuerzos las tensiones principales resultantes se determinan por las teorías de máxima tensión normal o tangencial.

Los árboles generalmente se hacen de materiales dúctiles, por lo que, comúnmente se supone que la teoría de la máxima tensión tangencial rige el calculo de los mismos.
Desde que la relación entre el momento torsor al momento flexor y la relación entre la tensión de rotura por tracción a la tensión de rotura por corte determinan la forma de la falla, muchos proyectistas prefieren determinar el diámetro del árbol por ambas teorías de la máxima tensión tangencial y de la máxima tensión normal, y adoptar el diámetro mayor.
Cuando el esfuerzo es solo de torsión, la tensión máxima y la deformación angular son:

$$\tau_t = \frac{Mt.d}{2.Ip} \qquad \text{y} \qquad \theta = \frac{Mt.L}{Ip.G}$$

$\tau_t =$ Tensión tangencial de torsión (kg/cm^2)
$Mt =$ Momento torsor (kgcm)

Cuando el eje está sometido a flexión solamente, la máxima tensión está dada por:

$$\sigma_f = \frac{Mc}{I} = \frac{32M}{\pi.d^3} \quad \text{Para ejes macizos}$$

$$\sigma_f = \frac{32M}{\pi.d_o^3} . \frac{1}{1-K^4} \quad \text{Para ejes huecos}$$

$K = \frac{d_i}{d_o}$ (relación del diámetro interior al exterior
σ_f = tensión de flexión (kg/cm^2)
M = Momento flector (kgcm)
I = Momento de inercia polar del área de la sección transversal respecto del eje neutro (cm^4)

Cuando el árbol está sometido simultáneamente a esfuerzos de torsión y flexión, al sustituir las tensiones σ_f y ζ_t, se obtiene:

$$\tau_{máx} = \frac{16}{\pi d_o^3} \sqrt{M^2 + M_t^2} . \left(\frac{1}{1-K^4} \right) \leq \tau_{tad} \quad \text{(Máxima tensión tangencial)}$$

$$\sigma_{máx} = \frac{16}{\pi d_o^3} M + \sqrt{M^2 + M_t^2} . \left(\frac{1}{1-K^4} \right) \leq \sigma_{ad} \quad \text{(Máxima tensión normal)}$$

La expresión $\sqrt{M^2 + M_t^2}$, es comúnmente llamada *momento torsor equivalente,* y la expresión $\frac{1}{2}\left(M + \sqrt{M^2 + M_t^2}\right)$ *momento flector equivalente o ideal.*

En ciertas instalaciones el árbol está sometido a carga axial, además de los esfuerzos de torsión y flexión.
Si no hay posibilidad de pandeo, las ecuaciones quedan:

$$\tau_{máx} = \frac{16}{\pi d_o^3}\sqrt{\left[M + \frac{F_a.d_o.\left(1+K^2\right)}{8}\right]^2 + M_t^2}.\left(\frac{1}{1-K^4}\right)$$

$$\sigma_{máx} = \frac{16}{\pi d_o^3}\left[M + \frac{F_a.d_o\left(1+K^2\right)}{8} + \sqrt{\left(M + \frac{F_a.d_o.\left(1+K^2\right)}{8}\right)^2 + M_t^2}\right].\left(\frac{1}{1-K^4}\right)$$

Si las cargas axiales producen pandeo, este efecto puede ser tenido en cuenta multiplicando el término $\left[\frac{F_a.d_o\left(1+K^2\right)}{8}\right]$ de las ecuaciones anteriores, por un valor α, que es igual a la relación entre la tensión máxima producida por pandeo debido a la carga axial actuando sola y la tensión de compresión simple.

Norma para el cálculo de árboles

La American Society of Mechanical Engineers (A.S.M.E.), es la autora de una norma para el cálculo de árboles que se basa, en la suposición de que el árbol esté construido de un material dúctil cuya resistencia a la rotura por tracción es doble de la resistencia a la rotura por corte. Para este caso, el cálculo del diámetro del árbol se rige por la teoría de la máxima tensión tangencial, independientemente de la relación del momento torsor al momento flector.
La ecuación de la norma A.S.M.E. para un eje hueco sometido a torsión, flexión y carga axial, con factores de fatiga de choque introducidos en ella.

$$d_o^{\,3} = \frac{16}{\pi.\tau_t}\sqrt{\left[K_m.M + \frac{\alpha.F_a.d_o.\left(1+K^2\right)}{8}\right]^2 + \left(K_t.M_t\right)^2}.\left(\frac{1}{1-K^4}\right)$$

Donde: d_o = diámetro exterior del árbol, cm
F_a = esfuerzo axial de tracción o compresión, Kg.
K = relación entre los diámetros interior a exterior en árboles huecos
K_m = factor combinado de choque y fatiga a aplicar al momento flector calculado
K_t = factor combinado de choque y fatiga a aplicar al momento torsor calculado
M = momento flector máximo, kgcm
M_t =momento torsor máximo, kgcm
ζ_t = máxima tensión tangencial admisible, kg/cm^2
α = relación entre la tensión máxima producida por pandeo debido a la carga axial a la tensión de compresión simple.

El valor de α se obtiene considerando la carga axial, o empuje, como el esfuerzo sobre una columna de diámetro *d* que tenga una longitud igual a la separación entre cojinetes. Para columnas que tengan una esbeltez menor de 115 comúnmente se usa una formula lineal:

$$\alpha = \frac{1}{1 - 0{,}0044\left(\frac{L}{i}\right)}$$

Donde: L = separación entre cojinetes de apoyo, cm
i = radio de giro del árbol, cm.

Cuando la esbeltez es mayor que 115, la ecuación de Euler dá:

$$\alpha = \frac{\sigma_{fl}}{n.\pi^2 E}.\left(\frac{L}{i}\right)^2$$

donde σ_{fl} = tensión de fluencia en compresión, kg/cm^2
n = constante de acuerdo al tipo de fijación de los extremos del árbol
E = módulo de elasticidad, kg/cm^2

Para extremos libres, ***n es igual a la unidad, y para cojinetes fijos, n puede tomarse como 2,25***.
Cuando el árbol está sometido solo a esfuerzos de flexión, α, F_a y M_t se anulan. Cuando la tensión tangencial ζ_t se reemplaza por su tensión de tracción equivalente $\frac{\sigma_t}{2}$, la ecuación pasa a ser:

$$d_o = \sqrt[3]{\frac{32}{\pi.\sigma_t}.K_m M}.\frac{1}{\sqrt[3]{1-K^4}}$$

Cuando el árbol está sometido solo a esfuerzos de torsión α, F y M, se anulan, y la ecuación pasa a ser:

$$d_o = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi.\tau_t}.K_t M_t}.\frac{1}{\sqrt[3]{1-K^4}}$$

Máximas tensiones de trabajo permisibles para árboles (Kg / cm^2)

Calidad del material	***Flexión pura***	***Torsión pura***	***Tensiones combinadas***
Árboles de acero comercial, sin tener en cuenta los chaveteros	1120	560	560
Árboles de acero comercial, teniendo en cuenta los chaveteros	840	420	420
Acero comprado bajo especificaciones definidas	60% del límite elástico, pero no más del 36% de la resistencia a la rotura por tracción.	30% del límite elástico, pero no más del 18% de la resistencia a la rotura por tracción.	30% del límite elástico, pero no más del 18% de la resistencia a la rotura por tracción.

Las máximas tensiones admisibles a usarse en las ecuaciones son las dadas en la tabla anterior. Los valores para la tensión de trabajo son aquellos adecuados para un estado de carga estático, y son tales que sobre esta base un eje macizo tendrá un factor de seguridad de 2,3 respecto del límite elástico y de 4 a 4,5 respecto de la resistencia a la rotura por tracción. Las propiedades de los aceros usados comúnmente para árboles se dan en la tabla siguiente:

Propiedades de materiales para árboles (kg/cm^2)

Material	**Carbono %**	***Resistencia a la rotura por tracción***						***Alarga-miento %***
		Tracción	Compresión	Torsión	Tracción	Compresión	Torsión	
Acero laminado en frío	0,10 – 0,25	490	490	245	245	245	125	35
Acero torneado	0,10 – 0,25	420	420	210	210	210	105	35
Acero laminado en caliente o forjado	0,15 – 0,25 0,25 – 0,35 0,35 – 0,45 0,45 – 0,55	455 490 525 560	455 490 525 560	230 245 260 280	250 280 315 350	250 280 315 350	115 120 130 140	26 24 22 20
Acero con 3,5% de Níquel	0,15 – 0,25	600	600	300	385	385	150	26
Acero con Cromo y Vanadio	0,25 – 0,35	630	630	315	420	420	160	25

Factores de choque y fatiga

Desde que un árbol que gira está sometido a tensiones totalmente alternativas, debe usarse en la ecuación de la norma A.S.M.E., un factor de fatiga, [155] un factor de fatiga, *Km* de por lo menos 1,5. Cuando los esfuerzos de flexión y torsión están sujetos a variaciones de intensidad o con choques, las tensiones producidas serán mayores que bajo condiciones estáticas, y los valores de *Km* y *Kt* tomados de la tabla siguiente, tienen en cuenta estas tensiones adicionales:

Factores de choque y fatiga combinados a utilizar en las ecuaciones

Tipo de esfuerzo	***Arboles que giran***		***Ejes fijos***	
	K_m	K_t	K_m	K_t
Esfuerzos estables y gradualmente aplicados	1,5	1,0	1,0	1,0
Esfuerzos bruscamente aplicados con choque moderado	1,5 – 2,0	1,0 – 1,5	1,5 – 2,0	1,5 – 2,0
Esfuerzos bruscamente aplicados con choque fuerte	2,0 – 3,0	1,5 – 3,0		

Árboles de materiales frágiles

El calculo de árboles según se ha indicado se aplica a materiales dúctiles, para los cuales rige la teoría de la máxima tensión tangencial. Ocasionalmente, se usan materiales frágiles, y se aplica la teoría de la máxima tensión normal.

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_f}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_f + 4\tau_t^2}$$

de la cual:

$$\sigma_{\max} = \frac{16}{\pi . d_o^3}\left[K_m M + \sqrt{(K_m M)^2 + (K_t M_t)^2}\right]\frac{1}{1-K^4} \Rightarrow d_o^3$$

$$d_o^3 = \frac{16}{\pi . \sigma_{\max}}\left[K_m M + \sqrt{(K_m M)^2 + (K_t M_t)^2}\right]\frac{1}{1-K^4}$$

Efecto de los chaveteros
El chavetero tallado en el árbol afecta materialmente su resistencia o capacidad de carga desde que se generan tensiones altamente localizadas en los rincones y en su proximidad, siendo los efectos más pronunciados cuando prevalecen los estados de choque y de fatiga. El *"Code for Transmisión Shafting"* recomienda el uso de una eficiencia de 75% para árboles con chaveteros.
La alta, concentración de tensión en los rincones del chavetero puede reducirse proveyendo rincones redondeados. Un radio de curvatura igual a la mitad de la profundidad del chavetero igual a la mitad de la profundidad del chavetero se considera una buena práctica. Este tipo de chavetero no ha sido normalizado, pero la marina de los EE. UU. y la "American Bureau of Shipping" usan chaveteros con rincones redondeados.

ÁRBOLES DE TRASMISIÓN.
Los árboles de trasmisión sirven primariamente para trasmitir potencia por torsión y están por lo tanto sometidos principalmente a tensiones tangenciales. Las poleas engranajes, piñones de cadenas y órganos similares que lleva el árbol, introducen esfuerzos de flexión que en general no pueden ser determinados, y se acostumbra suponer que trabajan a la torsión pura, teniéndose en cuenta las tensiones desconocidas de flexión usando una tensión de calculo mas baja para aquellos ejes en que la experiencia indica que sufren tensiones de flexión severas.
Hasta aquí el cálculo de los árboles y ejes se ha basado en el factor de resistencia, fijándose tensiones admisibles. Otro criterio de cálculo es **fijar deformaciones máximas admisibles.**
En máquinas herramientas, por ejemplo, la rigidez de sus elementos es un factor fundamental para asegurar la precisión requerida en sus operaciones. Los árboles y ejes de máquinas deben en consecuencia, calcularse o verificarse teniendo en cuenta la deformación.
La deformación por torsión en árboles, de transmisión debe estar limitada a 1^o en 20 diámetros. La flecha originada por flexión no debe exceder 0,8 mm por metro de longitud.

Rigidez a la torsión

Consideremos un intervalo de un árbol de sección constante sometido a la acción de un M_r, constante en toda su longitud.

De la figura se deduce:

$$L.\phi = r.\varphi$$

L: Longitud del intervalo
Φ: Ángulo de distorsión del material
φ: ángulo de torsión en radianes (rotación relativa de las secciones extremas del intervalo de longitud L

$$\varphi = \frac{L.\phi}{r} = \frac{L}{r}.\frac{\tau_r}{G} = \frac{L}{r}.\frac{M_r}{\frac{I_p}{r}}\frac{1}{G} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi = \frac{M_r.L}{G.I_p}(Radianes)}$$

$$\boxed{\varphi = \frac{180}{\pi}\frac{M_r.L}{G.I_p}}$$

G: Módulo de elasticidad transversal del material (kg/cm^2)

I_p: Momento de inercia polar de la sección transversal (cm^4)

$$I_p = \frac{\pi}{32}\left(d^4 - d_o^4\right) = \frac{\pi.d^4}{32}\left(1 - \beta^4\right)$$

d: Diámetro exterior (cm)

d_o: Diámetro interior (cm^4)

La fórmula anterior puede servir para el cálculo o la verificación de árboles fijando el valor de φ admisible en el intervalo L, o el valor máximo admisible de la relación $\frac{\varphi}{L}$, tratándose en general de un árbol de sección variable sometido a una solicitación de M_t también variable, corresponde calcular los ángulos de torsión φ entre secciones extremas de intervalos dentro de los cuales mantengan constancia la sección y el M_t, y luego sumarlos algebraicamente, de esta manera puede obtenerse el ángulo de torsión entre dos secciones cualesquiera del árbol.

Para árboles construidos con acero SAE 1045, es frecuente fijar como condición de rigidez $\frac{\varphi}{L} \leq \frac{1}{4}$ º/m

Teniendo en cuenta que G = 800000 kg/cm^2 y $M_t = 71620\frac{N}{n}$, se llega a la siguiente fórmula:

$$\boxed{d \geq 0{,}735.\sqrt[4]{\frac{Mt}{1-\beta^4}} = 1{,}2.\sqrt[4]{\frac{N}{n.(1-\beta^4)}}} \text{ (cm)}$$

Si la condición es 1º en una longitud de 20 veces el diámetro, se llega a:

$$\boxed{d \geq 0{,}245.\sqrt[4]{\frac{Mt}{1-\beta^4}} = 10{,}17.\sqrt[4]{\frac{N}{n.(1-\beta^4)}}} \text{ (cm)}$$