

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

FACULTAD REGIONAL ROSARIO

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA QUÍMICA

FENÓMENOS DE TRANSPORTE

NOTAS DE CÁTEDRA: “UNIDAD TEMÁTICA 5”

- **ANÁLISIS ENVOLVENTE PARA ENERGÍA CALORÍFICA**
- **ECUACIONES DIFERENCIALES TRANSMISIÓN DE CALOR**
 - **CAPA LÍMITE TÉRMICA - TURBULENCIA**

Revisión: Octubre 2008

“La presente es una recopilación de diversas notas y apuntes de cátedra dispersas que fueron elaboradas o redactadas en los últimos años. Se agradece especialmente la colaboración de los alumnos cursantes en 2008: Brusa, Juan José; Caliva, Juan Pablo; Ciambotti, Leonardo; Maurici, Brenda; Rodriguez, Leandro; Cantore, M. Cecilia; Demagistris, Verónica; Gorosurreta, Lucía; Mendez Taborda, Rocío; Roldán, Mariel; Almada, Victorio; Ciordia, Bárbara; Dari, Antonela; López, Ana; Ruggiero, Franco; Balsola, Jorgelina; Cuellas, Leonardo; Onofri, Mariana; Almará, Sebastián; Arroyo, Federico; Mignini, Augusto; Palavecino, Andrés; Urcia Storti, Miguel; Barrangú, Inaki; Aguilar, Viviana; Salgado, Nadia; Tarditti, Lara; Combina, Gabriel para su compilación y organización, que con la coordinación del Auxiliar Juan M. Dominguez permite disponer de esta versión revisada. Se advierte que estas notas son solo una guía para el estudio, debiendo consultarse la bibliografía recomendada en cada tema para lograr un conocimiento pleno de los mismos.”

Cátedra de Fenómenos de Transporte

Ing. Jorge E. Robin

Ing. Marcela N. Kaminsky

Juan M. Dominguez

5.A. ANALISIS ENVOLVENTE PARA ENERGÍA CALORÍFICA

Las distribuciones de temperatura en sólidos o en líquidos en movimiento laminar se pueden resolver por un método semejante al visto anteriormente. Es decir, en este caso;

- (1) Se efectúa un balance de energía a una lámina delgada o una envoltura perpendicular al flujo de calor, obteniendo una relación de la densidad de flujo de calor con la posición.
- (2) Se introduce la ley de Fourier de la conducción de calor, obteniendo la distribución de la temperatura.
- (3) Las condiciones iniciales y finales no son diferentes en estos casos (estado estacionario) y las condiciones límites permiten determinar las constantes de integración de las ecuaciones diferenciales obtenidas.

Es preciso tener en cuenta que estos balances corresponden a sistemas geométricos sencillos que permiten familiarizarse con los conceptos físicos y condiciones límites que luego se abordan en las ecuaciones generales.

5.A.1. BALANCE DE ENERGIA

El planteo para estado estacionario, en sólidos y en fluidos en régimen laminar será:

$$\left| \begin{array}{c} \text{Velocidad de} \\ \text{entrada de} \\ \text{energía calorífica} \end{array} \right| - \left| \begin{array}{c} \text{Velocidad de} \\ \text{salida de} \\ \text{energía calorífica} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{Velocidad de} \\ \text{producción de} \\ \text{energía calorífica} \end{array} \right| = 0$$

La entrada/salida de Energía Calorífica se realiza por los siguientes “mecanismos”:

1. Conducción de calor; de acuerdo con la ley de Fourier, que representa al transporte molecular de calor (sólidos o fluidos).
2. Movimiento global del fluido; es un transporte convectivo y la energía se llama también calor sensible (porque implica un cambio de temperatura).

Además, la “producción” de energía calorífica puede provenir de diversas fuentes de energía o manantiales, que se expresan en velocidades de producción de energía por unidad de volumen. Entre ellas se pueden citar:

3. Eléctrica; degradación de la energía eléctrica (conocida como "Ley de Joule")

$$S_e = \frac{I^2}{k_e} \quad [S_e] = \frac{\text{Energía}}{\text{Volumen} \cdot \text{Tiempo}}$$

Siendo:

$$[S_e] = \frac{\text{Energía}}{\text{Volumen} \cdot \text{Tiempo}}$$

Velocidad de degradación de energía eléctrica
en la unidad de volumen

$$[J] = \frac{\text{Intensidad de corriente}}{\text{Unidad de Area}}$$

Densidad de corriente eléctrica

$$[k_e] = \frac{1}{\text{Longitud} \cdot \text{Resistencia eléctrica}}$$

Conductibilidad eléctrica

4. Nuclear; disminución de la velocidad de neutrones u otros fragmentos nucleares librados por fisión o por fusión.

$$[S_n] = S_{n0} \left[1 - b \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

Siendo:

$$[S_n] = \frac{\text{Energía}}{\text{Volumen} \cdot \text{Tiempo}}$$

Velocidad de generación de fisión
nuclear, función de la posición.

$$[S_{n0}] = \frac{\text{Energía}}{\text{Volumen} \cdot \text{Tiempo}}$$

Velocidad de generación en el núcleo o
centro de la esfera.

$[b]$ = Adimensional

Una constante entre 0 y 1.

$$\left[\frac{r}{R} \right] = \text{Adimensional}$$

Distancia desde el núcleo o centro.

5. Viscoso; degradación de la energía mecánica en calor o disipación viscosa.

$$S_v = -\tau_{xz} \left(\frac{dv_z}{dx} \right) = +\mu \left(\frac{dv_z}{dx} \right)^2$$

Siendo:

$$[S_v] = \frac{\text{Energía}}{\text{Volumen} \cdot \text{Tiempo}}$$

Velocidad de conversión de la energía mecánica en calor
por unidad de volumen originada en la viscosidad

$$[\mu] = \frac{M}{L \cdot \theta} \quad \text{Coeficiente de viscosidad (fluido newtoniano)}$$

$$\left[\frac{dv_z}{dx} \right] = \frac{1}{\text{Tiempo}} \quad \text{Gradiente de velocidad}$$

6. Químico: conversión de la energía química en calor por la reordenación de átomos de las moléculas reaccionantes para dar los productos.

$$S_q = S_{q0} \left(\frac{T - T_0}{T_1 - T_0} \right)$$

$$[S_q] = \frac{\text{Energía}}{\text{Volumen} \cdot \text{Tiempo}}$$

Velocidad de producción de energía calorífica en el volumen (se desprecian los efectos de presión, composición y actividad del catalizador si lo hubiera)

$$[S_{q0}] = \frac{\text{Energía}}{\text{Volumen} \cdot \text{Tiempo}}$$

Una constante empírica para ciertas condiciones de entrada.

$$[T^0] = \text{Temperatura absoluta}$$

Una temperatura de referencia

$$[T_1] = \text{Temperatura absoluta}$$

La temperatura en la entrada (o salida si se conoce)

$$[T] = \text{Temperatura absoluta}$$

Temperatura local, función de la posición

Por último las condiciones límites que normalmente se utilizan son las siguientes:

7. Temperatura de superficie conocida ($T_{\text{sup}}=T_0$)
8. La densidad de flujo de calor en la superficie puede estar determinada lo que equivale a especificar el gradiente de temperatura ($q_{\text{sup}}=q_0$).
9. En la interfase sólido-fluido se relacionan por una ecuación empírica ($q=h(T_s-T_f)$). Que se conoce como “Ley de Newton de transmisión calórica”, siendo h un coeficiente empírico (el coeficiente de transmisión del calor, superficial o pelicular), T_s la temperatura de la superficie y T_f la de la masa de fluido.
10. En la interfase sólido-sólido la temperatura y la densidad de flujo de calor son continuas.

5.A.2. BALANCE CON MANANTIAL ELECTRICO

Un alambre cilíndrico por el que circula una corriente eléctrica y donde parte de la misma se transforma irreversiblemente en calor. Se supone que las constantes físicas no varían con la temperatura, y que la superficie del mismo se mantiene a temperatura constante (T_0).

Conociendo la “Ley de Joule”

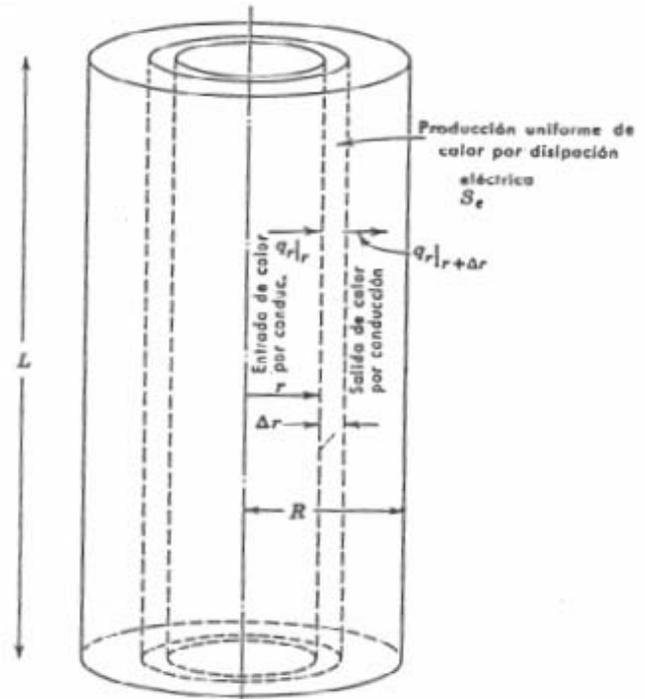
$$Q_e = i \cdot U = i^2 R_e$$

$$R_e = \rho_e \cdot \frac{L}{S} = \frac{1}{k_e} \cdot \frac{L}{S}$$

$$Q_e = i^2 \rho_e \frac{L}{S} = \frac{i^2}{k_e} \cdot \frac{L}{S}$$

$$S_e = \frac{Q_e}{L \cdot S} = \frac{i^2 \rho_e L}{L \cdot S^2} = \frac{i^2}{S^2 k_e}$$

$$S_e = \frac{i^2}{k_e}$$



Para nuestro sistema, el balance quedara planteado en cada uno de los términos de la ecuación general.

Velocidad de “entrada” de Energía Calorífica por conducción en la superficie cilíndrica situada en el radio r	= $(2\pi r L) q_r _r$
---	-----------------------

Velocidad de “salida” de Energía Calorífica por conducción en la superficie cilíndrica situada en $(r+\Delta r)$	= $2\pi(r + \Delta r) L \cdot q_r _{r+\Delta r}$
--	--

Velocidad de generación
de Energía Calorífica
por disipación eléctrica
en el volumen de la
envoltura

$$= \pi \left[(r + \Delta r)^2 - r^2 \right] L \cdot S_e$$

Reemplazando en el balance general:

$$(2\pi r L) q_r|_r - 2\pi (r + \Delta r) L q_r|_{r+\Delta r} + \pi \left[(r + \Delta r)^2 - r^2 \right] L S_e = 0$$

Dividiendo por $2\pi\Delta r L$ y simplificando:

$$\frac{r q_r|_r}{\Delta r} - \frac{(r + \Delta r) q_r|_{r+\Delta r}}{\Delta r} + \frac{(\Delta r + 2r)}{2} S_e = 0$$

Tomando límite para $\Delta r \rightarrow 0$;

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \left\{ \frac{(r + \Delta r) q_r|_{r+\Delta r} - r q_r|_r}{\Delta r} \right\} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta r + 2r}{2} \right) S_e \frac{dr \cdot q_r}{dr} = r S_e$$

Esta ecuación diferencial de primer orden de la densidad de flujo de energía se integra;

$$q_r = \frac{r S_e}{2} + \frac{C_1}{r}$$

como si $r=0$, q_r no es infinito, resulta $C_1=0$

$$q_r = \frac{r S_e}{2} \quad \text{Función lineal de } r$$

Aplicando la ecuación de Fourier (en dirección radial) $q_r = -k \frac{dT}{dr}$

$$-k \frac{dT}{dr} = \frac{r S_e}{2}$$

Integrando:

$$dT = -\frac{S_e}{2k} r \cdot dr$$

$$T = -\frac{S_e}{2k} \cdot \frac{r^2}{2} + C_2$$

como para $r=R \rightarrow T=T_0$ resulta $C_2 = T_0 + \frac{S_e R^2}{4k}$

Quedando:

$$T - T_0 = \frac{S_e R^2}{4k} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad \text{Función parabólica}$$

Las relaciones derivadas de la anterior son:

1. Diferencia máxima de temperatura, cuando $r=0$ se tiene $T=T_{\max}$, luego;

$$T_{\max} - T_0 = \frac{S_e R^2}{4k}$$

2. Diferencia media de temperatura, el promedio sobre la sección transversal

$$\langle T \rangle - T_0 = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R (T - T_0) r dr d\varphi}{\int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\varphi} = \frac{S_e R^2}{8k}$$

$$\langle T \rangle - T_0 = \frac{T_{\max} - T_0}{2} \quad \text{ó} \quad \frac{\langle T - T_0 \rangle}{T_{\max} - T_0} = \frac{1}{2}$$

3. La pérdida superficial de calor o flujo de calor en la superficie considerada

$$Q_r|_R = \int_S q_r|_R dS = 2\pi RL \frac{S_e R}{2} = \pi R^2 L S_e$$

El calor que se genera en el volumen del conductor, para estado estacionario, se pierde en la pared.

5.A.3. CONDUCCIÓN DE CALOR SIN GENERACION

Comúnmente en sistemas industriales de transmisión de calor se opera con conducción a través de paredes sólidas. Estas pueden ser de un solo material, o más frecuentemente, constituidas por capas de varios materiales de diferente conductividad térmica. Asimismo las mismas pueden ser planas, cilíndricas, esféricas o de otra forma.

5.A.3.1. Pared plana simple: asumiendo que la conductividad térmica sea constante o que sea una función lineal de la temperatura, tal que se considera un valor medio (\bar{k}) promediado entre las temperaturas de las superficies. Para una pared de altura H y ancho A, cuya superficie en está x_0 a temperatura T_0 y en el contacto con un fluido a temperatura T_a y cuya pared x_1 está a

temperatura T_1 en contacto con un fluido T_b ; el flujo calorífico está dirigido según x . El balance en la envoltura será:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Velocidad de Entrada} \\ \text{de calor por conducción} \end{array} \right| - \left| \begin{array}{l} \text{Velocidad de Salida} \\ \text{de calor por conducción} \end{array} \right| = 0$$

$$q_x|_x \cdot A \cdot H - q_x|_{x+\Delta x} \cdot A \cdot H = 0$$

Dividiendo por $A \cdot H \cdot \Delta x$ quedan los cocientes incrementales:

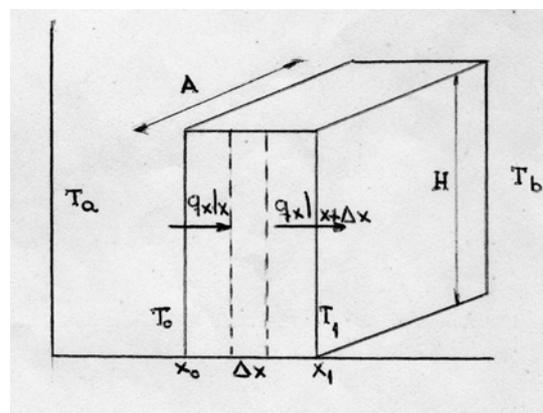
$$\frac{q_x|_x}{\Delta x} - \frac{q_x|_{x+\Delta x}}{\Delta x} = 0$$

Aplicando límite para $\Delta x \rightarrow 0$;

Se obtiene:

$$\frac{dq_x}{dx} = 0$$

y $q_x = q_0 = cte$



Donde q_0 es la densidad de flujo de calor en el plano donde $x=x_0$, pero en estado estacionario es la misma en cualquier sección transversal. Aplicando la ley de Fourier:

$$q_x = -k \frac{dT}{dx} = q_0 \quad [k] = \frac{E}{L \cdot \theta \cdot T}$$

e integrando;

$$q_0 = k \frac{(T_0 - T_1)}{(x_1 - x_0)} \quad [q] = \frac{E}{L^2 \cdot \theta}$$

siendo $k = constante$.

Para el caso común de que k sea función de T ; por ejemplo:

$$k = k^0 + \alpha T$$

donde $k=k^0$ para $T=T^0$ y α es una constante empírica.

Podemos resolverla de igual modo;

$$q_0 = -(k^0 + \alpha T) \frac{dT}{dx}$$

$$\int_{x_0}^x q_0 dx = - \left[\int_{T_0}^{T_1} k^0 dT + \int_{T_0}^{T_1} \alpha T dT \right]$$

$$q_0 (x_1 - x_0) = - \left[k^0 (T_1 - T_0) + \frac{\alpha}{2} (T_1^2 - T_0^2) \right]$$

$$q_0 (x_1 - x_0) = k^0 (T_0 - T_1) + \frac{\alpha}{2} (T_0 - T_1) \cdot (T_0 + T_1)$$

$$q_0 (x_1 - x_0) = (T_0 - T_1) \left[k^0 + \alpha \frac{(T_0 + T_1)}{2} \right]$$

Siendo: $\frac{(T_0 + T_1)}{2} = T_{med}$ y $k^0 + \alpha T_{med} = k_{med}$

Por lo que se obtiene:

$$q_0 = k_{med} \frac{(T_0 - T_1)}{(x_1 - x_0)}$$

que es igual al anterior para $k = k_{med}$

Si en la superficie se cumple la “Ley de enfriamiento de Newton”;

$$q_0 = h_0 (T_a - T_0) \quad \text{para } x = x_0$$

$$q_0 = h_1 (T_1 - T_b) \quad \text{para } x = x_1$$

podemos escribir:

$$T_a - T_0 = \frac{q_0}{h_0}$$

$$T_0 - T_1 = \frac{q_0}{k_{med}} \cdot (x_1 - x_0)$$

$$T_1 - T_b = \frac{q_0}{h_1}$$

Sumando;

$$T_a - T_b = q_0 \left[\frac{1}{h_0} + \frac{x_1 - x_0}{k_{med}} + \frac{1}{h_1} \right]$$

$$q_0 = \frac{T_a - T_b}{\left[\frac{1}{h_0} + \frac{x_1 - x_0}{k_{med}} + \frac{1}{h_1} \right]} \quad [q] = \frac{E}{\theta \cdot L^2}$$

El término del denominador a veces se engloba en un “coeficiente total de transmisión del calor” que por analogía de la Ley de Newton,

$$q_0 = U \cdot (T_a - T_b)$$

$$U = \frac{1}{\frac{1}{h_0} + \frac{x_1 - x_0}{k_{med}} + \frac{1}{h_1}} \quad [U] = \frac{E}{\theta \cdot L^2 \cdot T}$$

Que incluye la transmisión de calor en la interfase y por conducción en el sólido. Si el espesor de la pared es muy pequeño:

$$U \cong \frac{1}{\frac{1}{h_0} + \frac{1}{h_1}}$$

5.A.3.2. Pared plana compuesta: cuando tenemos varios materiales de diferente conductividad, el balance en estado estacionario conduce a expresiones semejantes a las obtenidas para cada pared, por lo tanto,

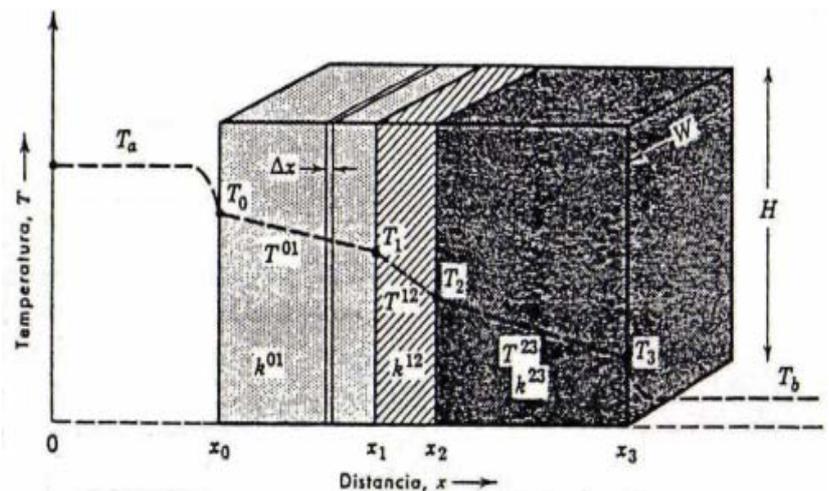
$$T_a - T_0 = \frac{q_0}{h_0}$$

$$T_0 - T_1 = \frac{q_0}{k_I} (x_1 - x_0)$$

$$T_1 - T_2 = \frac{q_0}{k_{II}} (x_2 - x_1)$$

$$T_2 - T_3 = \frac{q_0}{k_{III}} (x_3 - x_2)$$

$$T_3 - T_b = \frac{q_0}{h_3}$$



Sumando:

$$T_a - T_b = q_0 \left[\frac{1}{h_0} + \frac{(x_1 - x_0)}{k_I} + \frac{(x_2 - x_1)}{k_{II}} + \frac{(x_3 - x_2)}{k_{III}} + \frac{1}{h_3} \right]$$

$$q_0 = \frac{T_a - T_b}{\left(\frac{1}{h_0} + \sum_{i=1}^3 \frac{x_i - x_{i-1}}{k_i} + \frac{1}{h_3} \right)}$$

Esta expresión puede generalizarse para cualquier cantidad de paredes en serie, sin cámara de aire en la interfase sólido-sólido.

Definiendo el coeficiente total, U,

$$U = \frac{1}{\left(\frac{1}{h_0} + \sum_{i=1}^m \frac{x_i - x_{i-1}}{k_i} + \frac{1}{h_n} \right)}$$

$$q_0 = U \cdot (T_a - T_b)$$

y el flujo calorífico;

$$Q = U \cdot (A H) \cdot (T_a - T_b)$$

5.A.3.3. Paredes cilíndricas compuestas: en este caso el área transversal no es constante ($A = f(r)$) y el balance, de acuerdo a la nomenclatura de la figura quedará:

$$2\pi r L q_r \Big|_r - 2\pi (r + \Delta r) L q_r \Big|_{r+\Delta r} = 0$$

Dividiendo por $2\pi\Delta r L$

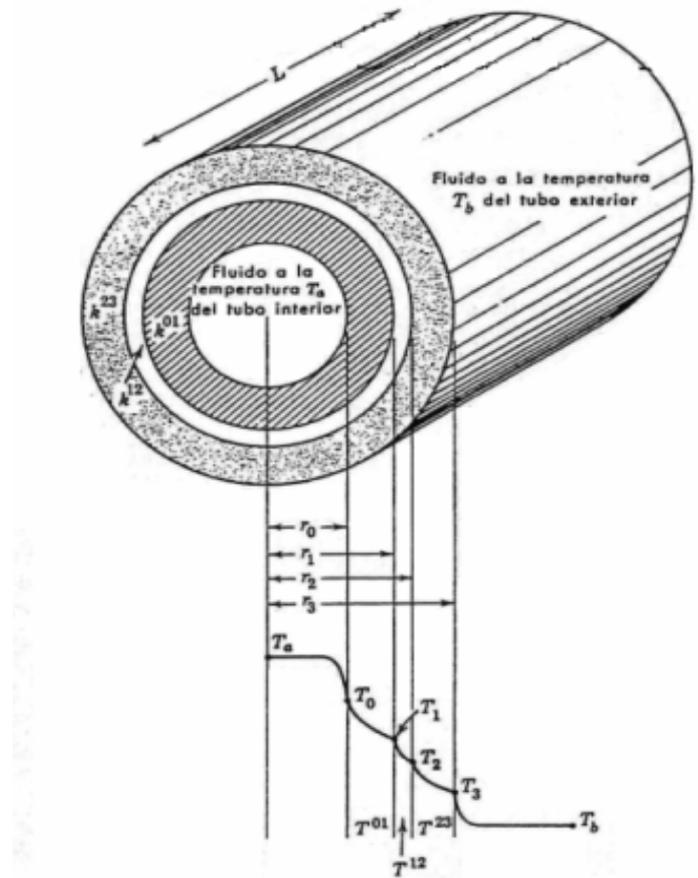
$$\frac{r \cdot q_r \Big|_r}{\Delta r} - \frac{(r + \Delta r) \cdot q_r \Big|_{r+\Delta r}}{\Delta r} = 0$$

Aplicando límite para $\Delta r \rightarrow 0$

$$\frac{dr q_r}{dr} = 0$$

e integrando se obtiene;

$$r q_r = \text{cte.}$$



Haciendo $r q_r = r_0 q_0 = r_n q_n$ donde r_0 es el radio interior y q_0 la densidad de flujo de calor en ese radio.

Para estado estacionario se puede aplicar la ecuación de Fourier a cualquier pared,

$$q_r = -k \frac{dT}{dr} \quad \text{para } k = \text{constante}$$

y;

$$r_0 q_0 = -rk_i \left(\frac{dT}{dr} \right)_i = -rk_{ii} \left(\frac{dT}{dr} \right)_{ii}$$

Integrando para cualquier pared;

$$r_0 q_0 \int_{r_{i-1}}^{r_i} \frac{dr}{r} = - \int_{T_{i-1}}^{T_i} k_i dT$$

$$r_0 q_0 \ln \frac{r_i}{r_{i-1}} = k_i (T_{i-1} - T_i)$$

Y por lo tanto podemos escribir,

$$T_0 - T_1 = r_0 q_0 \frac{\ln r_1 / r_0}{k_i}$$

$$T_1 - T_2 = r_0 q_0 \frac{\ln r_2 / r_1}{k_{ii}}$$

. . .
 . . .
 . . .

$$\frac{T_{n-1} - T_n}{T_0 - T_n} = \frac{r_0 \cdot q_0 \frac{\ln \frac{r_n}{r_{n-1}}}{k_n}}{r_0 \cdot q_0 \sum_{i=1}^n \frac{\ln \frac{r_i}{r_{i-1}}}{k_i}}$$

Además, por la “ecuación del enfriamiento de Newton” en la interfase sólido-fluido:

$$T_a - T_0 = \frac{q_0}{h_0}$$

$$T_n - T_b = \frac{q_n}{h_n} = \frac{q_0 \cdot r_0}{h_n \cdot r_n}$$

Sumando:

$$T_a - T_b = r_0 \cdot q_0 \left[\frac{1}{h_0 \cdot r_0} + \sum_{i=1}^n \frac{\ln \frac{r_i}{r_{i-1}}}{k_i} + \frac{1}{h_n \cdot r_n} \right]$$

El flujo calorífico en la superficie de radio r_0 será:

$$Q_0 = 2\pi L r_0 q_0$$

$$Q_0 = \frac{2\pi L (T_a - T_b)}{\left[\frac{1}{h_0 \cdot r_0} + \sum_{i=1}^n \frac{\ln \frac{r_i}{r_{i-1}}}{k_i} + \frac{1}{h_n \cdot r_n} \right]}$$

Definido un “coeficiente global basado en el área interna” U_0 ,

$$Q_0 = U_0 (2\pi r_0 L) \cdot (T_a - T_b)$$

$$U_0 = \frac{1}{r_0 \left[\frac{1}{h_0 \cdot r_0} + \sum_{i=1}^n \frac{\ln \frac{r_i}{r_{i-1}}}{k_i} + \frac{1}{h_n \cdot r_n} \right]}$$

Se puede definir también el “coeficiente global basado en el área externa” U_n ,

$$Q_n = U_n (2\pi r_n L) \cdot (T_a - T_b)$$

$$U_n = \frac{1}{r_n \left[\frac{1}{h_0 \cdot r_0} + \sum_{i=1}^n \frac{\ln \frac{r_i}{r_{i-1}}}{k_i} + \frac{1}{h_n \cdot r_n} \right]}$$

Como para estado estacionario el flujo de calor debe ser el mismo a través de cualquier superficie (no así la densidad de flujo de calor), tenemos:

$$Q_0 = Q_n$$

$$U_0 r_0 = U_n r_n$$

Por lo tanto, en este caso el “coeficiente global” depende del área (o radio) que se considere y deberá usarse cuidadosamente al aplicarlo en los cálculos.

Para el caso de una pared simple de muy pequeño espesor y buen conductor de calor (por ejemplo, un metal como cobre, bronce, etc.), se puede escribir:

$$U_0 \approx \frac{1}{r_0 \left(\frac{1}{r_0 \cdot h_0} + \frac{1}{r_n \cdot h_n} \right)}$$

ya que $\ln r_1/r_0 \rightarrow 0$, y además como $r_0 \rightarrow r_n$:

$$U_0 \approx \frac{1}{\left(\frac{1}{h_0} + \frac{1}{h_n} \right)} \approx U_n$$

Por último, si alguno de los coeficientes es mucho mayor que el otro, por ejemplo: $h_n \gg h_0$, quedará: $1/h_0 \gg 1/h_n$, y se escribe:

$$U_0 \approx h_0$$

Se dice entonces que la interfase situada en r_0 es la que controla el fenómeno, o sea, la resistencia más importante al flujo de calor se encuentra en r_0 .

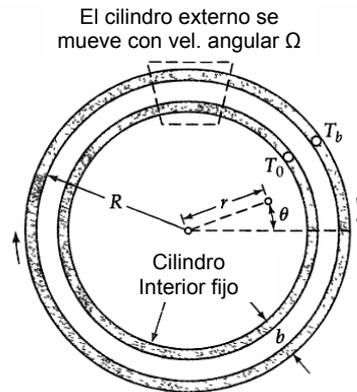
Coefficientes de transmisión de calor aproximados

Tipo	h (kcal / h m ² °C)
Condensación de vapor, gotas	25.000 - 100.000
Condensación de vapor, película	5.000 - 15.000
Agua, ebullición	1.500 - 45.000
Condensación de vapor orgánico	1.000 - 2.000
Vapor recalentado	25 - 100
Aire, convección forzada	10 - 75
Aire, convección natural	2,5 - 10

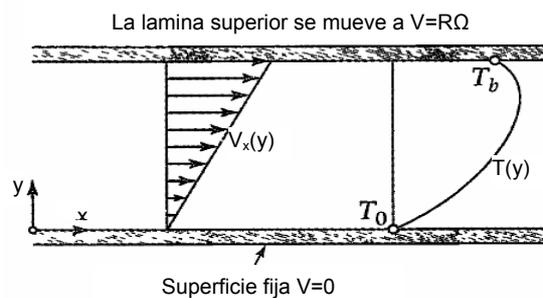
5.A.4. BALANCE CON MANANTIAL VISCOSO

Analizamos un fluido circulando por el espacio anular comprendido entre dos cilindros concéntricos, los cuales se mueven a distintas velocidades, por ejemplo, el interior fijo y el exterior moviéndose a una velocidad angular constante. Para mantener esta velocidad se debe

suministrar energía que se disipa irreversiblemente en calor. Esto es, las capas cilíndricas de fluido rozan entre sí, transformando la energía mecánica en energía calorífica. Suponemos las propiedades físicas del fluido constantes y las temperaturas de las superficies interna y externa constantes e iguales a T_0 y T_b respectivamente.



Si el espesor b es pequeño comparado con el radio R podemos simplificar nuestro sistema considerando el flujo entre dos láminas planas.



Se supone una lámina de ancho Z , espesor Y y longitud X . Para mantener la capa superior a una velocidad v_x , se debería aplicar una fuerza F_x

$$\frac{\text{Energía}}{\text{Volumen} \cdot \text{Tiempo}} = \frac{E}{L^3 \theta} = F_x \frac{\Delta x}{\Delta \theta} \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z}$$

$$[S_v] = \frac{E}{L^3 \theta}$$

$$\frac{F_x}{\Delta x \Delta z} = \tau_{yx}$$

Luego, $S_v = -\tau_{yx} \left(\frac{dv_x}{dy} \right)$ y como $\tau_{yx} = -\mu \left(\frac{dv_x}{dy} \right)$ queda $S_v = +\mu \left(\frac{dv_x}{dy} \right)$

La velocidad v_x está representada por un perfil lineal: $v_x = \left(\frac{y}{b} \right) \cdot V$ y $\frac{dv_x}{dy} = \frac{V}{b}$, quedando:

$$S_v = \mu \left(\frac{V}{b} \right)^2$$

Como sistema para el balance de energía calorífica en estado estacionario elegimos una envoltura de espesor Δy , ancho W y longitud L :

$$\left| \begin{array}{c} \text{Velocidad de Entrada} \\ \text{Energía Calorífica} \end{array} \right| - \left| \begin{array}{c} \text{Velocidad de Salida} \\ \text{Energía Calorífica} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{Velocidad de Generación} \\ \text{Viscosa de Energía} \end{array} \right| = 0$$

$$W \cdot L \cdot q_y|_y - W \cdot L \cdot q_y|_{y+\Delta y} + W \cdot L \cdot \Delta y \left[\mu \left(\frac{V}{b} \right)^2 \right] = 0$$

Dividiendo por $W L \Delta y$, simplificando y tomando límite para $\Delta y \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[\frac{q_y|_{y+\Delta y} - q_y|_y}{\Delta y} \right] = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[\mu \left(\frac{V}{b} \right)^2 \right]$$

Luego

$$\frac{dq_y}{dy} = \mu \cdot \left(\frac{V}{b} \right)^2$$

Si integramos esta ecuación diferencial de primer orden:

$$q_y = \mu \cdot \left(\frac{V}{b} \right)^2 \cdot y + C_1$$

Aplicando la ley de Fourier: $q_y = -k \cdot \frac{dT}{dy}$

$$-k \frac{dT}{dy} = \mu \cdot \left(\frac{V}{b} \right)^2 \cdot y + C_1$$

Integrando:

$$T = -\frac{\mu}{k} \cdot \left(\frac{V}{b} \right)^2 \cdot \left(\frac{y^2}{2} \right) - \frac{C_1}{k} \cdot y + C_2$$

para $y = 0 \rightarrow T = T_0$; $y = b \rightarrow T = T_b$ resultando:

$$C_2 = T_0$$

$$C_1 = -\frac{1}{2} \cdot \mu \cdot V^2 \cdot \frac{1}{b} - (T_b - T_0) \cdot \frac{k}{b}$$

Sustituyendo los valores de las constantes C_1 y C_2 y reordenando se obtiene:

$$\frac{T - T_0}{T_b - T_0} = \frac{y}{b} + \frac{1}{2} \cdot Br \cdot \left(\frac{y}{b}\right) \cdot \left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

Donde $Br = \frac{\mu \cdot V^2}{k \cdot (T_b - T_0)}$, llamado "Número de Brinkman".

El número de Brinkman es una medida de la contribución de calor por generación viscosa, en relación al flujo calórico resultante de una diferencia de temperatura. Si $Br > 2$, existe una temperatura máxima en un punto intermedio entre las dos paredes.

5.A.5. BALANCE EN UNA ALETA DE ENFRIAMIENTO

Con este tipo de superficies se aumenta el área disponible de intercambio calórico sin aumentar el tamaño del equipo.

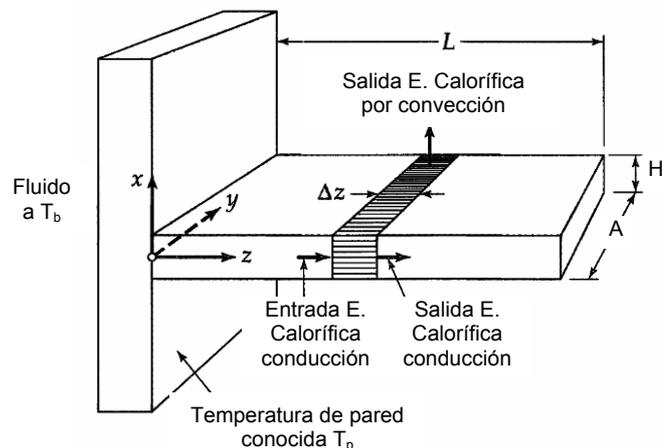
Utilizaremos un modelo aproximado cuyas condiciones, comparadas con las del sistema real, son:

REAL

- $T = f(\text{axial, transversal})$
- $h = f(\text{axial})$
- $k = f(\text{axial})$
- Por los bordes y extremos se disipa calor

MODELO

- $T = f(\text{axial})$
- $h = \text{constante}$
- $k = \text{constante}$
- No se disipa calor por los bordes y extremos



$$q = h \cdot (T_p - T_a)$$

$$Q = 2A \cdot \Delta z \cdot h \cdot (T_p - T_a)$$

Aplicando un balance de energía a un segmento Δz de la aleta:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Velocidad de Entrada} \\ \text{Energía Calorífica} \\ \text{por Conducción} \end{array} \right|_z - \left| \begin{array}{l} \text{Velocidad de Salida} \\ \text{Energía Calorífica} \\ \text{por Conducción} \end{array} \right|_{z+\Delta z} - \left| \begin{array}{l} \text{Velocidad de Salida} \\ \text{Energía Calorífica} \\ \text{por Convección} \end{array} \right| = 0$$

$$A \cdot H \cdot q_z|_z - A \cdot H \cdot q_z|_{z+\Delta z} - 2A \cdot \Delta z \cdot h \cdot (T - T_a) = 0$$

Dividiendo por $A \cdot H \cdot \Delta z$ y aplicando límite para $\Delta z \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{q_z|_z - q_z|_{z+\Delta z}}{\Delta z} - \frac{2h}{H} \cdot (T - T_a) = 0$$

$$-\frac{dq_z}{dz} - \frac{2h}{H} \cdot (T - T_a) = 0$$

Introduciendo la ley de Fourier: $q_z = -k \frac{dT}{dz}$ y derivando:

$$\frac{dq_z}{dz} = -k \frac{d^2T}{dz^2}$$

$$k \cdot \frac{d^2T}{dz^2} - \frac{2h}{H} \cdot (T - T_a) = 0$$

Si consideramos que:

$$\varphi = T - T_a$$

$$d\varphi = dT$$

$$\frac{2 \cdot h}{k \cdot H} = \lambda^2$$

La ecuación anterior nos queda: $\frac{d^2\varphi}{dz^2} - \lambda^2\varphi = 0$. Esta ecuación es del tipo: $y'' + ay' + by = 0$. Con ecuación característica: $m^2 + am + b = 0$. Donde $a = 0$ y $b = -\lambda^2$ y cuya solución viene dada por: $\varphi = A \cdot e^{m_1 z} + B \cdot e^{m_2 z}$, con raíces:

$$\pm \sqrt{\frac{-4 \cdot (-\lambda^2)}{2}} = m_{1,2} = \pm \lambda$$

Entonces:

$$\boxed{\varphi = A \cdot e^{\lambda z} + B \cdot e^{-\lambda z}}$$

Sumando y restando $A \cdot e^{-\lambda z}$

$$\begin{aligned} &= A \cdot e^{\lambda z} - A \cdot e^{-\lambda z} + A \cdot e^{-\lambda z} + B \cdot e^{-\lambda z} \\ &= A \cdot (e^{\lambda z} - e^{-\lambda z}) + (A + B) \cdot e^{-\lambda z} \end{aligned}$$

Si recordamos que:

$$\left. \begin{aligned} \sinh \lambda z &= \frac{e^{\lambda z} - e^{-\lambda z}}{2} \\ \cosh \lambda z &= \frac{e^{\lambda z} + e^{-\lambda z}}{2} \end{aligned} \right\} \rightarrow \cosh \lambda z - \sinh \lambda z = e^{-\lambda z}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= 2A \cdot \sinh \lambda z + (A + B) \cdot (\cosh \lambda z - \sinh \lambda z) \\ \varphi &= (A - B) \cdot \sinh \lambda z + (A + B) \cdot \cosh \lambda z \end{aligned}$$

Llamaremos: $(A + B) = C_1$ y $(A - B) = C_2$

Aplicando las condiciones límites:

▪ Condición límite I:

para $z=0 \rightarrow T=T_p$, $\cosh \lambda z=1$ y $\sinh \lambda z=0$

$$\varphi|_{z=0} = T_p - T$$

$$\text{Luego } T_p - T_a = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 \rightarrow \boxed{C_1 = T_p - T_a}$$

▪ Condición límite II:

para $z=L$

$$\left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=L} = 0$$

$$\left. \frac{d\varphi}{dz} \right|_{z=L} = C_1 \lambda \cdot \sinh \lambda L + C_2 \cdot \lambda \cosh \lambda L = 0$$

$$C_2 = -C_1 \cdot \frac{\sinh \lambda L}{\cosh \lambda L} = -C_1 \cdot \operatorname{tgh} \lambda L$$

$$\text{Luego: } C_2 = (T_p - T_a) \cdot \operatorname{tgh} \lambda L$$

$$\varphi = (T_p - T_a) \cdot \cosh \lambda z - (T_p - T_a) \cdot \operatorname{tgh} \lambda L \cdot \sinh \lambda z$$

$$\frac{\varphi}{T_p - T_a} = \cosh \lambda z - \operatorname{tgh} \lambda L \cdot \sinh \lambda z$$

$$\frac{\varphi}{T_p - T_a} = \frac{\cosh \lambda z \cdot \cosh \lambda z - \sinh \lambda z \cdot \sinh \lambda z}{\cosh \lambda L}$$

Y como: $\cosh (\alpha - \beta) = \cosh \alpha \cdot \cosh \beta - \sinh \alpha \cdot \sinh \beta$

Quedando

$$\boxed{\frac{T - T_a}{T_p - T_a} = \frac{\cosh \lambda(L - z)}{\cosh \lambda L}}$$

5.B. ECUACIONES DIFERENCIALES PARA LA TRANSMISIÓN DE CALOR

La generalización del balance de energía aplicado a una envoltura, utilizando además las ecuaciones de continuidad y del movimiento, permite obtener una expresión entre derivadas parciales que describe el transporte de energía en un sólido o fluido homogéneo. Esta ecuación de cambio representa la aplicación de la ley de conservación de la energía o primer principio de la termodinámica.

El postulado para el balance de energía se puede escribir: “la velocidad de cambio en el tiempo de la energía interna y cinética de un cuerpo respecto a las estrellas fijas es igual a la velocidad de trabajo comunicado al cuerpo por las fuerzas que actúan sobre el mismo más la velocidad de ganancia de energía por conducción del calor”.

5.B.1. BALANCE DE ENERGÍA

Para un sistema “abierto”, es decir, un elemento estacionario de volumen a través del cual circula un líquido puro, el postulado anterior para un determinado instante quedará:

Velocidad de acumulación de energía cinética e interna	=	Velocidad “NETA” de energía cinética e Interna por convección	+	Velocidad “NETA” de adición de calor por conducción	+	Velocidad “NETA” de trabajo del medio sobre el sistema
---	---	--	---	---	---	---

En el mismo no se incluyen la energía nuclear, electromagnética, etc. La energía cinética es la energía relacionada con un movimiento observable del fluido ($\frac{1}{2} v^2$ con base la unidad de masa o $\frac{1}{2} \rho^2$ para la unidad de volumen).

La energía interna responde a los movimientos fortuitos moleculares y la interacción intermolecular, dependiendo de la temperatura local y la densidad (\hat{U} para la unidad de masa, $\rho\hat{U}$ por unidad de volumen).

Las velocidades de energía interna y cinética a través de las superficies fronterizas del elemento originan el transporte convectivo, siendo el valor “neto” la diferencia entre entradas y salidas ($\Delta S_i v_i [\rho\hat{U} + \frac{1}{2} \rho v^2]$ donde ΔS_i es el área de la frontera perpendicular al vector velocidad v_i)

La velocidad de energía por conducción corresponde al transporte molecular de energía calorífica (ΔS_i para q_i la densidad de flujo de energía calorífica).

La velocidad de trabajo consta del realizado por fuerzas de volumen (gravitación) y de superficie (fuerzas viscosas y de presión).

Para un cubo de lados $\Delta x \Delta y \Delta z$ en un sistema cartesiano ortogonal derecho, los diferentes términos enunciados podrán escribirse:

<p>Velocidad de Acumulación de Energía Interna y Cinética</p>	$= \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\Delta}{\Delta \theta} \left(\rho \hat{U} + \frac{1}{2} \rho v^2 \right)$
<p>Velocidad NETA de Energía Cinética e Interna por Convección</p>	$= \left\{ \Delta y \Delta z \left\{ v_x \left(\rho \hat{U} + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) \Big _x - v_x \left(\rho \hat{U} + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) \Big _{x+\Delta x} \right\} + \right. \\ \left. + \Delta x \Delta z \left\{ v_y \left(\rho \hat{U} + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) \Big _y - v_y \left(\rho \hat{U} + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) \Big _{y+\Delta y} \right\} + \right. \\ \left. + \Delta x \Delta y \left\{ v_z \left(\rho \hat{U} + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) \Big _z - v_z \left(\rho \hat{U} + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) \Big _{z+\Delta z} \right\} \right\}$
<p>Velocidad NETA de Adición de Calor por Conducción</p>	$= \Delta y \Delta z \{ q_x _x - q_x _{x+\Delta x} \} + \Delta x \Delta z \{ q_y _y - q_y _{y+\Delta y} \} + \Delta x \Delta y \{ q_z _z - q_z _{z+\Delta z} \}$
<p>Velocidad de TRABAJO por la gravitación</p>	$= \rho \cdot \Delta x \Delta y \Delta z (v_x g_x + v_y g_y + v_z g_z)$
<p>Velocidad de TRABAJO por la presión en las caras</p>	$= \left\{ \Delta y \Delta z \{ (p v_x) _x - (p v_x) _{x+\Delta x} \} + \Delta x \Delta z \{ (p v_y) _y - (p v_y) _{y+\Delta y} \} + \right. \\ \left. + \Delta x \Delta y \{ (p v_z) _z - (p v_z) _{z+\Delta z} \} \right\}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Velocidad de} \\ \text{TRABAJO por las} \\ \text{fuerzas viscosas en} \\ \text{las caras} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \Delta y \Delta z \left\{ \left(\tau_{xx} v_x + \tau_{xy} v_y + \tau_{xz} v_z \right) \Big|_x - \left(\tau_{xx} v_x + \tau_{xy} v_y + \tau_{xz} v_z \right) \Big|_{x+\Delta x} \right\} + \\ + \Delta x \Delta z \left\{ \left(\tau_{yx} v_x + \tau_{yy} v_y + \tau_{yz} v_z \right) \Big|_y - \left(\tau_{yx} v_x + \tau_{yy} v_y + \tau_{yz} v_z \right) \Big|_{y+\Delta y} \right\} + \\ + \Delta x \Delta y \left\{ \left(\tau_{zx} v_x + \tau_{zy} v_y + \tau_{zz} v_z \right) \Big|_z - \left(\tau_{zx} v_x + \tau_{zy} v_y + \tau_{zz} v_z \right) \Big|_{z+\Delta z} \right\} \end{array} \right\}$$

Dividiendo por el elemento de volumen, y tomando límite cuando Δx , Δy , Δz , $\Delta \theta$ tienden a cero, se obtiene una expresión de la ecuación de la energía:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\rho \hat{U} + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) = & - \left(\frac{\partial}{\partial x} v_x \left(\rho \hat{U} + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} v_y \left(\rho \hat{U} + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) + \frac{\partial}{\partial z} v_z \left(\rho \hat{U} + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) \right) \\ & - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + \rho (v_x g_x + v_y g_y + v_z g_z) \\ & - \left(\frac{\partial p v_x}{\partial x} + \frac{\partial p v_y}{\partial y} + \frac{\partial p v_z}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xx} v_x + \tau_{xy} v_y + \tau_{xz} v_z) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yx} v_x + \tau_{yy} v_y + \tau_{yz} v_z) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zx} v_x + \tau_{zy} v_y + \tau_{zz} v_z) \right) \end{aligned}$$

Utilizando la notación vectorial – tensorial:

$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\rho \hat{U} + \frac{1}{2} \rho v^2 \right)$	$=$	$- \left(\nabla \cdot \rho v \left(\rho \hat{U} + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) \right)$	$- (\nabla \cdot \mathbf{q})$	$+$
Velocidad de ganancia de energía por unidad de volumen		Velocidad de entrada de energía debido a la convección por unidad de vol.	Velocidad de entrada de energía debido a la conducción por unidad de vol.	
$+ \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{g})$		$- (\nabla \cdot p \mathbf{v})$	$- (\nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}])$	
Velocidad de Trabajo entregado al fluido debido a las fuerzas de gravitación por unidad de volumen		Velocidad de Trabajo comunicado al fluido debido a las fuerzas de presión por unidad de volumen	Velocidad de Trabajo comunicado al fluido debido a las fuerzas viscosas por unidad de volumen	

Esta es la expresión de la Ecuación de la Energía para un elemento de volumen fijo en el espacio en coordenadas cartesianas.

A continuación se va a diferenciar el primer miembro y el término correspondiente a la convección, quedando:

$$\rho \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\hat{U} + \frac{1}{2} v^2 \right) + \left(\hat{U} + \frac{1}{2} v^2 \right) \frac{\partial \rho}{\partial \theta} =$$

$$- \left[\rho v \cdot \nabla \left(\hat{U} + \frac{1}{2} v^2 \right) + \left(\hat{U} + \frac{1}{2} v^2 \right) \nabla \cdot \rho v \right] - (\nabla \cdot q) + \rho (v \cdot g) - (\nabla \cdot \rho v) - (\nabla \cdot [\tau \cdot v])$$

Reordenando:

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\hat{U} + \frac{1}{2} v^2 \right) + \left(v \cdot \nabla \left(\hat{U} + \frac{1}{2} v^2 \right) \right) \right] + \left(\hat{U} + \frac{1}{2} v^2 \right) \left[\frac{\partial \rho}{\partial \theta} + (\nabla \cdot \rho v) \right] =$$

$$= -(\nabla \cdot q) + \rho (v \cdot g) - (\nabla \cdot \rho v) - (\nabla \cdot [\tau \cdot v])$$

El primer término del primer miembro es la densidad local del fluido por la derivada sustancial de la energía interna y cinética por unidad de masa. El segundo término de ese miembro es cero porque el multiplicando entre barras es la ecuación de continuidad.

Por lo tanto, la Ecuación de la Energía quedará;

$$\rho \frac{D \left(\hat{U} + \frac{1}{2} v^2 \right)}{D\theta} = -(\nabla \cdot q) + \rho (v \cdot g) - (\nabla \cdot \rho v) - (\nabla \cdot [\tau \cdot v])$$

que corresponde al observador que se mueve con el fluido.

5.B.2. ECUACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

Si de la ecuación del movimiento para un fluido puro isotérmico:

$$\rho \frac{Dv}{D\theta} = -\nabla p - [\nabla \cdot \tau] + \rho g$$

se forma el producto escalar de la velocidad v , quedará:

$$\rho \frac{D \left(\frac{1}{2} v^2 \right)}{D\theta} = -(v \cdot \nabla p) - (v \cdot [\nabla \cdot \tau]) + \rho (v \cdot g)$$

que describe la velocidad de variación de la energía cinética por unidad de masa para el fluido que se mueve con la corriente. Teniendo en cuenta que,

$$(\nabla \cdot \rho v) = (v \cdot \nabla p) + p(\nabla \cdot v)$$

y que,

$$(\nabla \cdot [\tau \cdot v]) = (v \cdot [\nabla \cdot \tau]) + (\tau : \nabla v)$$

donde esta última igualdad se desarrolla completamente en el apéndice (“Comprobación de la Identidad Tensorial”).

De aquí se puede escribir la Ecuación de la Energía Mecánica (isotérmica):

$$\rho \frac{D\left(\frac{1}{2}v^2\right)}{D\theta} = -(\nabla \cdot p\mathbf{v}) + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) - (\nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}]) - (-\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v})$$

<p>Velocidad de Ganancia de Energía Cinética por unidad de volumen para el elemento móvil</p>	<p>Velocidad de Trabajo producido por la presión sobre el elemento de volumen</p>	<p>Velocidad “reversible” de conversión en Energía Interna</p>	<p>Velocidad de Trabajo de la gravitación sobre el elemento de volumen</p>
<p>Velocidad de Trabajo de las fuerzas viscosas que actúan sobre el elemento de volumen</p>	<p>Velocidad “irreversible” de conversión en Energía Interna</p>		

Por los términos $\rho(\nabla \cdot \mathbf{v})$ y $-(-\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v})$ el fluido se calienta o enfría internamente, esto es, hablar de sistema “isotérmicos” implica decir que el calor generado o absorbido no da lugar a cambio mensurable de temperatura. Para gases que sufren una expansión o compresión brusca, como en compresores, turbinas, etc., el término $\rho(\nabla \cdot \mathbf{v})$ es importante. Además, en sistemas con gradientes de velocidad elevados se puede apreciar una variación de temperatura a causa del término $-(-\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v})$.

5.B.3. ECUACIÓN DE LA ENERGÍA CALORÍFICA

Reescribiendo la Ecuación de la Energía para el elemento de fluido que se mueve y la Ecuación de la Energía Mecánica, restando ésta de la anterior se podrá obtener:

$$(-) \left[\begin{aligned} \rho \frac{D\left(\hat{U} + \frac{1}{2}v^2\right)}{D\theta} &= -(\nabla \cdot \mathbf{q}) + \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) - (\nabla \cdot p\mathbf{v}) - (\nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}]) \\ \rho \frac{D\left(\frac{1}{2}v^2\right)}{D\theta} &= -(\nabla \cdot p\mathbf{v}) + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) - (\nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}]) + (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}) \end{aligned} \right.$$

$$\rho \frac{D\hat{U}}{D\theta} = -(\nabla \cdot q) - \rho(\nabla \cdot v) - (\tau : \nabla v)$$

Velocidad de Ganancia de Energía Interna por unidad de volumen	Velocidad de entrada de Energía Interna por Conducción	Velocidad “reversible” de aumento por Compresión	Velocidad “irreversible” de aumento de energía interna debido a la disipación viscosa por unidad de volumen
--	--	--	--

Ésta es la Ecuación de la Energía Calorífica, que es conveniente de usar para la transmisión del calor. En la misma, los términos segundo y tercero del segundo miembro representan la interconversión de energía mecánica y calorífica.

Esta ecuación representa el cambio en la energía interna de un elemento de volumen que se mueve con el fluido, que a través de su frontera intercambia calor por transporte molecular (conducción), que puede comprimirse o expandirse originando un aumento o disminución de su energía interna y que irreversiblemente “consume” energía mecánica transformándola en calor.

5.B.4. ECUACIÓN DE LA ENERGÍA TOTAL

Una generalización útil consiste en agrupar los términos de la energía interna, cinética y gravitatoria (transformándola en una energía “potencial”) en función de los de conducción, presión y viscosos, correspondiendo al planteamiento del Primer Principio de la Termodinámica para el sistema de flujo y que permitiría luego su integración a todo el elemento de volumen.

De la ecuación de la Energía Calorífica:

$$\rho \frac{D\hat{U}}{D\theta} = -(\nabla \cdot q) - \rho(\nabla \cdot v) - (\tau : \nabla v)$$

El término $\rho(\nabla \cdot v)$ representa la interconversión reversible de energía mecánica en calor; si es negativo se comprime y si es positivo se expande.

El término $-(\tau : \nabla v)$ es siempre positivo y es la degradación irreversible de energía mecánica a energía calorífica, pero ello basta recordar que:

$$(\tau : \nabla v) = \sum_i \sum_j \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

Como, por ejemplo, para fluidos newtonianos se puede sustituir el esfuerzo por las relaciones funcionales conocidas

$$\tau_{ij} = -2\mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot v) \quad \text{si } i=j$$

$$\tau_{ij} = -\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \tau_{ji} \quad \text{si } i \neq j$$

se puede escribir,

$$-(\tau : \nabla v) = \frac{1}{2} \mu \sum_i \sum_j \left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot v) \delta_{ij} \right]^2 \quad \text{para} \quad \begin{cases} \delta_{ij} = 1 & i=j \\ \delta_{ij} = 0 & i \neq j \end{cases}$$

que es siempre positivo por ser una suma de términos cuadráticos. Ésta se escribe a veces,

$$-(\tau : \nabla v) = \mu \cdot \phi_v \quad \text{donde } \phi_v \text{ es la función de disipación viscosa}$$

En coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} \phi_v = & 2 \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2 - \\ & - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \end{aligned}$$

El trabajo de la gravitación se puede transformar en energía potencial definiendo una función escalar $\hat{\Phi}$ tal que:

$$\mathbf{g} = -\nabla \hat{\Phi}$$

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) = -\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla \hat{\Phi}) = -\rho \frac{D\hat{\Phi}}{D\theta} + \rho \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \theta}$$

En general, la gravitación no depende del tiempo, luego $\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \theta} = 0$; en la ecuación del fluido en movimiento podemos escribir:

$$\rho \frac{D}{D\theta} \left(\hat{U} + \hat{\Phi} + \frac{1}{2} v^2 \right) = -(\nabla \cdot \mathbf{q}) - (\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) - (\nabla \cdot [\tau \cdot \mathbf{v}]) \quad \text{Ecuación [1]}$$

y entonces la suma $\hat{U} + \hat{\Phi} + \frac{1}{2} v^2$ la llamamos energía total \hat{E}_T .

5.B.5. TRANSFORMACIONES EN FUNCIÓN DE LA TEMPERATURA

La ecuación de la energía calorífica se puede transformar teniendo en cuenta que $\hat{U} = f(\hat{V}, T)$, luego:

$$d\hat{U} = \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{V}} \right)_T d\hat{V} + \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial T} \right)_{\hat{V}} dT \quad \otimes$$

Además:

$$Td\hat{S} = d\hat{U} + pd\hat{V}$$

es decir,

$$Td\hat{S} = \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{V}} \right)_T d\hat{V} + \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial T} \right)_{\hat{V}} dT + pd\hat{V}$$

$$d\hat{S} = \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial T} \right)_{\hat{V}} \frac{dT}{T} + \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{V}} \right)_T + p \right] d\hat{V}$$

siendo $S = f(T, \hat{V})$

$$d\hat{S} = \left(\frac{\partial \hat{S}}{\partial T} \right)_{\hat{V}} dT + \left(\frac{\partial \hat{S}}{\partial \hat{V}} \right)_T d\hat{V}$$

quedará que;

$$\left(\frac{\partial \hat{S}}{\partial T} \right)_{\hat{V}} = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial T} \right)_{\hat{V}} \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial \hat{S}}{\partial \hat{V}} \right)_T = \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{V}} \right)_T + p \right]$$

Como además es un diferencial total exacto, se debe cumplir que;

$$\frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial T \partial \hat{V}} = \frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial \hat{V} \partial T}$$

de donde

$$\frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial T \partial \hat{V}} = \frac{1}{T} \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial T \partial \hat{V}}$$

$$\frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial \hat{V} \partial T} = \frac{1}{T} \left[\frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial \hat{V} \partial T} + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_{\hat{V}} \right] - \frac{1}{T^2} \left[\left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{V}} \right)_T + p \right]$$

Igualando y simplificando:

$$\frac{1}{T} \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial T \partial \hat{V}} = \frac{1}{T} \left[\frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial \hat{V} \partial T} + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_{\hat{V}} \right] - \frac{1}{T^2} \left[\left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{V}} \right)_T + p \right]$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\hat{V}} = \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{V}}\right)_T + p \right] \quad \otimes \otimes$$

Vemos que el segundo miembro se puede llevar a la ecuación para $Td\hat{S}$, quedando:

$$Td\hat{S} = \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial T}\right)_{\hat{V}} dT + T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\hat{V}} d\hat{V}$$

y como $\hat{C}_v = \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial T}\right)_{\hat{V}}$

$$Td\hat{S} = \hat{C}_v dT + T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\hat{V}} d\hat{V}$$

Además, de las ecuaciones \otimes y $\otimes \otimes$:

$$\left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{V}}\right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\hat{V}} - p$$

$$d\hat{U} = \hat{C}_v dT + \left[T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\hat{V}} - p \right] d\hat{V}$$

Para el fluido en movimiento (multiplicando por ρ);

$$\rho \frac{D\hat{U}}{D\theta} = \rho \hat{C}_v \frac{DT}{D\theta} + \left[T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\hat{V}} - p \right] \rho \frac{D\hat{V}}{D\theta}$$

Además de la ecuación de continuidad;

$$\rho \frac{D\hat{V}}{D\theta} = \rho \frac{D}{D\theta} (1/\rho) = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{D\theta} = (\nabla \cdot \mathbf{v})$$

por lo tanto

$$\rho \frac{D\hat{U}}{D\theta} = \rho \hat{C}_v \frac{DT}{D\theta} + \left[T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\hat{V}} - p \right] (\nabla \cdot \mathbf{v})$$

y recordando la ecuación de la energía calorífica:

$$\rho \frac{D\hat{U}}{D\theta} = -(\nabla \cdot \mathbf{q}) - p(\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v})$$

igualando ambas:

$$\rho \hat{C}_v \frac{DT}{D\theta} = -(\nabla \cdot \mathbf{q}) - T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\hat{V}} (\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}) \quad \text{Ecuación [2]}$$

llamada Ecuación de la Energía en Función de la Temperatura.

Reemplazando ahora el $(\nabla \cdot q)$ en función de gradientes de temperaturas y τ según los gradientes de velocidad:

$$\rho \hat{C}_v \frac{DT}{D\theta} = k\nabla^2 T - T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_{\hat{V}} (\nabla \cdot v) + \mu \phi_v \quad \text{Ecuación [3]}$$

Conducción de calor
Efectos de Expansión
Calentamiento Viscoso

5.B.6. ECUACIONES SIMPLIFICADAS

Omitiendo el término de disipación viscosa y asumiendo propiedades físicas constantes, se presenta,

- Gas Ideal;

$$\rho \hat{V} = \frac{RT}{M} \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_{\hat{V}} = \frac{R}{\hat{V}M} = \frac{P}{T} = cte$$

Luego,

$$\rho \hat{C}_v \frac{DT}{D\theta} = k\nabla^2 T - \mathcal{P} \frac{P}{\mathcal{P}} (\nabla \cdot v)$$

- Fluidos a p=constante:

$$d\hat{U} = \hat{C}_p dT - p d\hat{V}$$

$$\rho \frac{D\hat{U}}{D\theta} = \rho \hat{C}_p \frac{DT}{D\theta} - \rho p \frac{d\hat{V}}{D\theta}$$

$$\rho \frac{D\hat{U}}{D\theta} = \rho \hat{C}_p \frac{DT}{D\theta} - p(\nabla \cdot v)$$

y como

$$\rho \frac{D\hat{U}}{D\theta} = k\nabla^2 T - p(\nabla \cdot v)$$

$$\rho \hat{C}_p \frac{DT}{D\theta} = k\nabla^2 T \quad \text{Fluido a p=constante}$$

- Fluidos incompresibles ($\rho=cte$);

Aquí $\hat{C}_p = \hat{C}_v$ y $(\nabla \cdot v) = 0$

$$\rho \hat{C}_p \frac{DT}{D\theta} = k\nabla^2 T$$

$$\frac{DT}{D\theta} = \frac{k}{\rho \hat{C}_p} \nabla^2 T \quad \text{Fluido incompresible}$$

- Sólidos;

Aquí $\rho = \text{cte.}$ y $v = 0$, luego

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{k}{\rho \hat{C}_p} \nabla^2 T \quad \text{Sólido}$$

5.B.7. MANANTIALES

- Disipación viscosa; aparece automáticamente, $d_v = (-\tau : \nabla v)$ al considerar los términos de trabajo y energía mecánica.
- Generación química; no aparece por considerar un fluido puro.
- Generación eléctrica y nuclear; no se consideran los casos.

Ecuaciones simplificadas (para condiciones del sistema).

Las ecuaciones 1, 2, 3 son generales. Si se consideran propiedades físicas constantes, se pueden obtener formas simplificadas ya vistas. Además, en ciertos casos se puede despreciar el transporte molecular (τ y q nulos), Por ejemplo:

- En procesos adiabáticos diseñados para obtener efectos mínimos de fricción como tubos Venturi y tuberías.
- Flujo de alta velocidad alrededor de objetos sumergidos; las mismas deben realizarse con cuidado.

Ejemplo: Un gas ideal que circula con efectos viscosos y de conducción de calor nulos.

Partiendo de la ecuación de energía en función de C_p y T ;

$$\rho \hat{C}_p \frac{DT}{D\theta} = -(\nabla \cdot q) + \left(\frac{\partial \ln \hat{V}}{\partial \ln T} \right)_p \frac{Dp}{D\theta} - (\tau : \nabla v)$$

que quedará;

$$\rho \hat{C}_p \frac{DT}{D\theta} = \left(\frac{\partial \ln \hat{V}}{\partial \ln T} \right)_p \frac{DP}{D\theta}$$

Para gases ideales;

$$P \cdot \hat{V} = \frac{RT}{M}$$

$$\ln P + \ln \hat{V} = \ln \frac{R}{M} + \ln T$$

$$d \ln P + d \ln \hat{V} = d \ln T$$

$$\left(\frac{\partial \ln \hat{V}}{\partial \ln T} \right)_P = 1$$

y,

$$\rho \hat{C}_p \frac{DT}{D\theta} = \frac{DP}{D\theta}$$

ó

$$\frac{dP}{dT} = \rho \hat{C}_p \quad \text{como} \quad \frac{P}{\rho} = \frac{RT}{M}, \quad \rho = \frac{M \cdot P}{RT}$$

$$\frac{dP}{dT} = \frac{M \cdot P}{RT} \cdot \hat{C}_p$$

$$\frac{dP}{P} = \frac{M}{R} \cdot \hat{C}_p \cdot \frac{dT}{T} \quad \text{y} \quad \hat{C}_p - \hat{C}_v = \frac{R}{M} \quad (\text{gas ideal})$$

$$d \ln P = \frac{\hat{C}_p}{\hat{C}_p - \hat{C}_v} \cdot d \ln T$$

Definiendo: $\gamma = \frac{\hat{C}_p}{\hat{C}_v}$

$$\frac{d \ln P}{d \ln T} = \frac{\frac{\hat{C}_p}{\hat{C}_v}}{\frac{\hat{C}_p}{\hat{C}_v} - 1} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}$$

Integrando;

$$\frac{P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{T} = cte$$

Comportamiento adiabático reversible (Isentrópico)
Si $\Delta T_R > \Delta T_{\text{Teórico}}$ en compresión

Para escribirla en función de la entalpía;

$$\hat{H} = \hat{U} + P\hat{V}$$

$$d\hat{H} = d\hat{U} + dP\hat{V} = d\hat{U} + P d\hat{V} + \hat{V} dP$$

$$\frac{D\hat{H}}{D\theta} = \frac{D\hat{U}}{D\theta} + P \frac{D\hat{V}}{D\theta} + \hat{V} \frac{DP}{D\theta}$$

y como, $\frac{D\hat{V}}{D\theta} = \frac{(\nabla \cdot v)}{\rho}$

Reordenando y multiplicando por ρ ,

$$\rho \frac{D\hat{U}}{D\theta} = \rho \frac{D\hat{H}}{D\theta} - P(\nabla \cdot v) - \rho \hat{V} \frac{DP}{D\theta}$$

y la ecuación energía calorífica;

$$\rho \frac{D\hat{U}}{D\theta} = -(\nabla \cdot q) - P(\nabla \cdot v) - (\tau : \nabla v)$$

Luego;

$$\rho \frac{D\hat{H}}{D\theta} = \frac{DP}{D\theta} - (\nabla \cdot q) - (\tau : \nabla v)$$

5.B.8. RESUMEN DE LAS ECUACIONES

Las tablas adjuntas muestran las ecuaciones de cambio para fluidos puros.

- La tabla 5.1 la presenta para observador estacionario o que se mueve con el fluido.
- En la tabla 5.2 se resumen para fluidos de propiedades constantes (ρ , μ , k).

Ambas se presentan en notación vectorial – tensorial.

- La tabla 5.3 muestra la Ecuación de Fourier para la densidad de flujo de energía en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.
- Igualmente la 5.4 presenta la Ecuación de la Energía en función de las densidades de flujo y de las propiedades de transporte, en sus diversas formas especiales (Convección forzada, libre y en función de distintos potenciales termodinámicos).

LA ECUACION DE LA ENERGÍA EN FUNCIÓN DE LAS DENSIDADES DE FLUJO DE ENERGÍA Y DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Coordenadas Rectangulares:

$$\begin{aligned} \rho \hat{C}_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) &= - \left[\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right] \\ - T \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &- \left\{ \tau_{xx} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v_y}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial z} \right\} \\ - \left\{ \tau_{xy} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \tau_{xz} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \tau_{yz} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \right\} & \end{aligned} \quad (A)$$

Coordenadas Cilíndricas:

$$\begin{aligned} \rho \hat{C}_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) &= - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r q_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right] \\ - T \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &- \left\{ \tau_{rr} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \tau_{\theta\theta} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) \right. \\ + \tau_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial z} - \left. \left\{ \tau_{r\theta} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] + \tau_{rz} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \right. \right. \\ + \left. \left. \tau_{\theta z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \right\} \right\} & \end{aligned} \quad (B)$$

Coordenadas Esféricas:

$$\begin{aligned} \rho \hat{C}_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) &= - \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 q_r) \right. \\ + \left. \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (q_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial q_\phi}{\partial \phi} \right] &- T \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) \right. \\ + \left. \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) &- \left\{ \tau_{rr} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \tau_{\theta\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) \right. \\ + \left. \tau_{\phi\phi} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + v_r; v_\theta \cot \theta \right) \right\} &- \left\{ \tau_{r\theta} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right) \right. \\ + \left. \tau_{r\phi} \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r} \right) + \tau_{\theta\phi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - \frac{\cot \theta}{r} v_\phi \right) \right\} & \end{aligned} \quad (C)$$

Nota: Los términos entre corchetes corresponden a la disipación viscosa y pueden generalmente despreciarse, excepto para sistemas que poseen elevados gradientes de velocidad.

TABLA 5.1

LA ECUACION DE LA ENERGÍA EN FUNCIÓN DE PROPIEDADES DE TRANSPORTE

(Para fluidos newtonianos de ρ , μ , k constantes; obsérvese que la constancia de ρ implica que $\hat{C}_\rho = \hat{C}_v$)

Coordenadas Rectangulares:

$$\begin{aligned} \rho \hat{C}_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) &= k \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \\ &+ 2\mu \left\{ \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right\} + \mu \left\{ \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 \right. \\ &\left. + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (A)$$

Coordenadas Cilíndricas:

$$\begin{aligned} \rho \hat{C}_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) &= k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \\ &+ 2\mu \left\{ \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) \right]^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right\} + \mu \left\{ \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right)^2 \right. \\ &\left. + \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (B)$$

Coordenadas Esféricas:

$$\begin{aligned} \rho \hat{C}_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) &= k \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right. \\ &\left. + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \right] + 2\mu \left\{ \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 \right. \\ &\left. + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \right)^2 \right\} \\ &+ \mu \left\{ \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]^2 + \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\phi}{r} \right) \right]^2 \right. \\ &\left. + \left[\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_\phi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (C)$$

Nota: Los términos entre corchetes corresponden a la disipación viscosa y pueden generalmente despreciarse, excepto para sistemas que poseen elevados gradientes de velocidad.

TABLA 5.2

COMPONENTES DE LA DENSIDAD DE FLUJO DE ENERGÍA q		
Rectangulares	Cilíndricas	Esféricas
$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (A)$	$q_r = -k \frac{\partial T}{\partial r} \quad (D)$	$q_r = -k \frac{\partial T}{\partial r} \quad (G)$
$q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad (B)$	$q_\theta = -k \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \quad (E)$	$q_\theta = -k \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \quad (H)$
$q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (C)$	$q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (F)$	$q_\phi = -k \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} \quad (I)$

TABLA 5.3

ECUACIONES DE VARIACIÓN PARA FLUIDOS PUROS EN FUNCIÓN DE LAS DENSIDADES DE FLUJO

Ec.	Forma especial	En función de D/Dt	Observaciones
Cont.	-	$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho(\nabla \cdot v)$	3.1-6 (A) Para $D\rho/Dt = 0$ se transforma en $(\nabla \cdot v) = 0$
Movimiento	Convección forzada	$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla p - [\nabla \cdot \tau] + \rho g$	3.2-10 (B) Para $\tau = 0$ se transforma en la ecuación de Euler
	Convección libre	$\rho \frac{Dv}{Dt} = -[\nabla \cdot \tau] - \rho \beta g(T - T_0)$	10.3-3 (C) Aproximada
Energía	En función de $\hat{E} = \hat{U} + \hat{K} + \hat{\Phi}$	$\rho \frac{D\hat{E}}{Dt} = -(\nabla \cdot q) - (\nabla \cdot \rho v) - (\nabla \cdot [\tau \cdot v])$	10.1-15 (D) Sólo exacta para $\hat{\Phi}$ independiente del tiempo
	En función de $\hat{U} + \hat{K}$	$\rho \frac{D(\hat{U} + \hat{K})}{Dt} = -(\nabla \cdot q) - (\nabla \cdot \rho v) - (\nabla \cdot [\tau \cdot v]) + \rho(v \cdot g)$	10.1-11 (E)
	En función de $\hat{K} = \frac{1}{2}v^2$	$\rho \frac{D\hat{K}}{Dt} = -(v \cdot \nabla p) - (v \cdot [\nabla \cdot \tau]) + \rho(v \cdot g)$	3.3-1 (F)
	En función de \hat{U}	$\rho \frac{D\hat{U}}{Dt} = -(\nabla \cdot q) - \rho(\nabla \cdot v) - (\tau : \nabla v)$	10.1-13 (G) El término que contiene ρ es cero para $D\rho/Dt = 0$
	En función de \hat{H}	$\rho \frac{D\hat{H}}{Dt} = -(\nabla \cdot q) - (\tau : \nabla v) + \frac{Dp}{Dt}$	(H)
	En función de \hat{C}_v y T	$\rho \hat{C}_v \frac{DT}{Dt} = -(\nabla \cdot q) - T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_p (\nabla \cdot v) - (\tau : \nabla v)$	10.1-19 (I) Para un gas ideal $T(p \partial/\partial T)_p = p$
	En función de \hat{C}_p y T	$\rho \hat{C}_p \frac{DT}{Dt} = -(\nabla \cdot q) + \left(\frac{\partial \ln \hat{V}}{\partial \ln T} \right)_p \frac{Dp}{Dt} - (\tau : \nabla v)$	(J) Para un gas ideal $(\partial \ln \hat{V} / \partial \ln T)_p = 1$

TABLA 5.4a

Ec.	Forma especial	En función de $\partial/\partial t$	
Cont	-	$\frac{\partial}{\partial t} \rho = -(\nabla \cdot \rho v)$	3.1-4 (K)
Movimi	Convección forzada	$\frac{\partial}{\partial t} \rho v = -[\nabla \cdot p] - \nabla p - [\nabla \cdot \tau] + \rho g$	3.2-8 (L)
	Convección libre	$\frac{\partial}{\partial t} \rho v = -[\nabla \cdot \rho v] = [\nabla \cdot \tau] = \rho \beta g(T - T_0)$ (Aproximada)	(M)
Energía	En función de $\hat{E} = \hat{U} + \hat{K} + \Phi$	$\frac{\partial}{\partial t} \rho \hat{E} = -(\nabla \cdot \rho \hat{E} v) - (\nabla \cdot q) - (\nabla \cdot p v) - (\nabla \cdot [\tau \cdot v])$	(N)
	En función de $\hat{U} + \hat{K}$	$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\hat{U} + \hat{K}) = -(\nabla \cdot \rho(\hat{U} + \hat{K})v) - (\nabla \cdot q) - (\nabla \cdot p v) - (\nabla \cdot [\tau \cdot v]) + \rho(v \cdot g)$	10.1-9 (O)
	En función de $\hat{K} = \frac{1}{2}v^2$	$\frac{\partial}{\partial t} \rho \hat{K} = -(\nabla \cdot \rho \hat{K} v) - (v \cdot \nabla p) - (v \cdot [\nabla \cdot \tau]) + \rho(v \cdot g)$	3.3-2 (P)
	En función de \hat{U}	$\frac{\partial}{\partial t} \rho \hat{U} = -(\nabla \cdot \rho \hat{U} v) - (\nabla \cdot q) - \rho(\nabla \cdot v) - (\tau : \nabla v)$	(Q)
	En función de \hat{H}	$\frac{\partial}{\partial t} \rho \hat{H} = -(\nabla \cdot \rho \hat{H} v) - (\nabla \cdot q) - (\tau : \nabla v) + \frac{Dp}{Dt}$	(R)
	En función de \hat{C}_v y T	$\frac{\partial}{\partial t} \rho \hat{C}_v T = -(\nabla \cdot \rho \hat{C}_v T v) - (\nabla \cdot q) - T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_p (\nabla \cdot v) - (\tau : \nabla v) + \rho T \frac{DC_v}{Dt}$	(S)
En función de \hat{C}_p y T	$\frac{\partial}{\partial t} \rho \hat{C}_p T = -(\nabla \cdot \rho \hat{C}_p T v) - (\nabla \cdot q) - (\tau : \nabla v) + \left(\frac{\partial \ln \hat{V}}{\partial \ln T} \right)_p \frac{Dp}{Dt} + \rho T \frac{DC_p}{Dt}$	(T)	

TABLA 5.4b

ECUACIONES DE VARIACIÓN PARA FLUIDOS PUROS DE ρ , μ , k CONSTANTES

Ec.	Forma especial	Ecuación en forma simbólica	Sistema coordinado		
			Rect.	Cil.	Esf.
Cont.	-	$(\nabla \cdot v) = 0$ (A)	Tabla 3.4-1 Ec. A	Tabla 3.4-1 F.c. B	Tabla 3.4-1 Ec. c
Movimiento	Convección forzada	$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 v + \rho g$ (B)	Tabla 3.4-2 Ecs. D, E, F	Tabla 3.4-3 Ecs. D, E, F	Tabla 3.4-4 Ecs. D, E, F
	Convección libre	$\rho \frac{Dv}{Dt} = \mu \nabla^2 v - \rho \beta g(T - T_0)$ (C)	-	-	-
Energía	En función de \hat{U}	$\rho \frac{D\hat{U}}{Dt} = k \nabla^2 T + \mu \Phi_v$ (D)	-	-	-
	En función de \hat{C}_p y T	$\rho \hat{C}_p \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T + \mu \Phi_v$ (E)	Tabla 10.2-3 Ec. A	Tabla 10.2-3 Ec. B	Tabla 10.2-3 Ec. c

TABLA 5.4c

5.B.9. ANALISIS DIMENSIONAL DE LAS ECUACIONES DE CAMBIO

Las ecuaciones de cambio permiten la demostración rigurosa del principio de semejanza dinámica y del uso de relaciones adimensionales. Para un fluido de propiedades físicas constantes, la Ecuación de la Energía puede escribirse,

$$\rho \hat{C}_v \frac{DT}{D\theta} = k \nabla^2 T + \mu \phi_v$$

Si definimos una velocidad representativa o característica del sistema V (por ejemplo, la velocidad promedio en una sección de flujo), una longitud característica D_c (por ejemplo, el diámetro de un conducto), T₀ como temperatura representativa (por ejemplo la del medio ambiente), se pueden formar las siguientes variables adimensionales:

$$\begin{aligned} v^* &= \frac{V}{V} & \theta^* &= \theta \frac{V}{D_c} & x^*, y^*, z^* &= \frac{x}{D_c}, \frac{y}{D_c}, \frac{z}{D_c} \\ \rho^* &= \frac{\rho - \rho_0}{\rho V^2} & T^* &= \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} & \nabla^* &= D_c \cdot \nabla \\ \nabla^{*2} &= \nabla^2 D_c^2 & \frac{D}{D\theta^*} &= \left(\frac{D_c}{V} \right) \frac{D}{D\theta} & \phi_v^* &= \phi_v \frac{D_c^2}{V^2} \end{aligned}$$

Remplazando;

$$(T_1 - T_0) \rho \hat{C}_p \frac{V}{D_c} \frac{DT^*}{D\theta^*} = \frac{k(T_1 - T_0)}{D_c^2} \nabla^{*2} T^* + \mu \frac{V^2}{D_c^2} \phi_v^*$$

y reordenando;

$$\frac{DT^*}{D\theta^*} = \frac{k}{\mu \cdot \hat{C}_p} \cdot \frac{\mu}{\rho D_c V} \nabla^{*2} T^* + \frac{k}{\mu \cdot \hat{C}_p} \cdot \frac{\mu}{\rho D_c V} \cdot \frac{\mu \cdot V^2}{k(T_1 - T_0)} \phi_v^*$$

$$\boxed{\frac{DT^*}{D\theta^*} = \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \nabla^{*2} T^* + \frac{\text{Br}}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \phi_v^*}$$

Esta es la ecuación de la Energía para convección forzada, siendo:

$$\text{Re} = \frac{\rho D_c V}{\mu} \quad \text{Pr} = \frac{\mu \cdot \hat{C}_p}{k} \quad \text{Br} = \frac{\mu \cdot V^2}{k(T_1 - T_0)}$$

Para el caso de la *convección libre* debemos aplicar también la ecuación del movimiento, donde en lugar de los gradientes de presión y gravitación aparece el empuje o fuerza de flotación,

$$\rho \frac{Dv}{D\theta} = \mu \cdot \nabla^2 v - \rho \beta g (T - T_0)$$

Esta es una ecuación aproximada, donde la temperatura del fluido oscila alrededor de T_0 y ρ la densidad a T_0 . En este caso se considera que la velocidad es muy lenta, debida exclusivamente a gradientes de temperatura.

Como no se dispone de una velocidad de referencia adecuada, definiremos,

$$v^\otimes = \frac{v \cdot D_c \cdot \rho}{\mu} \quad (\text{velocidad adimensional})$$

$$\theta^\otimes = \frac{\theta \cdot \mu}{\rho \cdot D_c^2} \quad (\text{tiempo adimensional})$$

Para la ecuación del movimiento,

$$\rho \frac{D \left(\frac{\mu \cdot v^\otimes}{D_c \cdot \rho} \right)}{D \left(\frac{\rho \cdot D_c^2 \theta^\otimes}{\mu} \right)} = \mu \frac{\nabla^2 \left(\frac{\mu \cdot v^\otimes}{D_c \cdot \rho} \right)}{D_c^2} - \rho \beta g \cdot (T_1 - T_0) \cdot T^*$$

reordenando,

$$\frac{Dv^\otimes}{D\theta^\otimes} = \nabla^2 v^\otimes - \frac{\rho^2 \beta g \cdot (T_1 - T_0) D_c^3}{\mu^2} \cdot T^*$$

Donde: $Gr = \frac{\rho^2 \beta g \cdot (T_1 - T_0) D_c^3}{\mu^2}$ **Número de GRASHOF**

Para la ecuación de la energía, sin tener en cuenta el término de disipación viscosa,

$$\rho \hat{C}_p \frac{DT}{D\theta} = k \cdot \nabla^2 T$$

quedando,

$$\rho \hat{C}_p \frac{D \left[\frac{(T_1 - T_0) \cdot T^* + T_0}{D \frac{\theta^\otimes \rho \cdot D_c^2}{\mu}} \right]}{D \frac{\theta^\otimes \rho \cdot D_c^2}{\mu}} = k \frac{\nabla^2 \left[(T_1 - T_0) \cdot T^* + T_0 \right]}{D_c^2}$$

y reordenando,

$$\frac{DT^*}{D\theta^\otimes} = \frac{k}{\hat{C}_p \cdot \mu} \cdot \nabla^2 T^*$$

Donde: $\frac{1}{Pr} = \frac{k}{\hat{C}_p \cdot \mu}$ **Número de Prandtl –inverso-**

Por lo tanto, para la convección libre solo intervienen los grupos adimensionales de Prandtl y Grashof, ya que la disipación viscosa es muy poco importante.

Aplicación en convección forzada:

Cuando un fluido circula por un tubo y de acuerdo a la ecuación de variación correspondiente, el flujo de calor en la pared (q) dependerá de las características del sistema (D) y del flujo ($\langle v \rangle$), de la diferencia local de temperaturas (ΔT) y las propiedades del fluido (ρ , C_p , μ , k).

Por lo tanto,

$$q = f(\Delta T, k, C_p, \rho, \mu, D, \langle v \rangle)$$

Aplicando un sistema de las siguientes dimensiones fundamentales; masa (M), longitud (L), tiempo (θ), temperatura (T) y energía calorífica (H), y eligiendo consecuentemente las magnitudes características de acuerdo al teorema de Buckingham;

$\Pi = \text{Variables} - \text{Dimensiones Fundamentales}$

$$\Pi = 8 - 5 = 3 \quad \text{Grupos Adimensionales}$$

que arbitrariamente serán q , \hat{C}_p , μ .

Luego formaremos;

$$q = \Pi_1 \cdot \Delta T^{a1} \cdot k^{b1} \cdot \rho^{c1} \cdot D^{d1} \cdot \langle v \rangle^{e1}$$

$$\hat{C}_p = \Pi_2 \cdot \Delta T^{a2} \cdot k^{b2} \cdot \rho^{c2} \cdot D^{d2} \cdot \langle v \rangle^{e2}$$

$$\mu = \Pi_3 \cdot \Delta T^{a3} \cdot k^{b3} \cdot \rho^{c3} \cdot D^{d3} \cdot \langle v \rangle^{e3}$$

quedando;

$$\Pi_1 = \frac{q \cdot D}{\Delta T} \quad \text{ó} \quad \Pi_1 = \frac{h \cdot D}{k} \quad (\text{Número de Nusselt})$$

$$\Pi_2 = \frac{\hat{C}_p \cdot \rho \cdot \langle v \rangle \cdot D}{k} \quad \text{ó} \quad \Pi_2 = \frac{\hat{C}_p \cdot \mu \cdot \rho \cdot \langle v \rangle \cdot D}{k \cdot \mu} \quad (\text{Número de Peclet})$$

$$\Pi_3 = \frac{\rho \cdot \langle v \rangle \cdot D}{\mu} \quad (\text{Número de Reynolds})$$

Para la convección forzada en tubos, tenemos,

$$Nu = f(Re, Pr)$$

El número de Nusselt (Nu) es un gradiente adimensional de temperatura, o sea, la relación entre la densidad de flujo de calor en la interfase y la conducción para el gradiente

local de temperatura. Cambiando las variables características por q , k , μ , se puede demostrar que:

$$S_T = f(\text{Re}, \text{Pr})$$

Donde,

$$S_T = \frac{q}{\Delta T \cdot \hat{C}_p \cdot \rho \cdot \langle v \rangle} \quad \text{ó} \quad S_T = \frac{h}{\hat{C}_p \cdot \rho \cdot \langle v \rangle} = \frac{Nu}{\text{Re} \cdot \text{Pr}}$$

Siendo el número de STANTON (S_T) la relación entre la transferencia de calor en la interfase al flujo calorífico por convección por cada unidad de diferencia de temperatura local. En los anteriores no aparece la relación L/D ni el número de Brinkman (B_R).

Aplicación en convección libre:

Como se ha visto, la variación de la densidad origina el movimiento del fluido. Por lo tanto, si a la temperatura T_0 la densidad es ρ_0 , el empuje que recibe por unidad de volumen, a la temperatura T tendrá una densidad ρ , y entonces;

$$\text{Empuje}|_{\text{vol}} = (\rho_0 - \rho) \cdot g$$

$$\text{Empuje}|_{\text{masa}} = \frac{(\rho_0 - \rho)}{\rho} \cdot g$$

y para un coeficiente de expansión β (referido a la temperatura del conjunto del fluido);

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} \cdot (1 + \beta \cdot \Delta T) \quad \text{ó} \quad \Delta \rho = \rho \cdot \beta \cdot \Delta T$$

$$\text{Empuje}|_{\text{masa}} = \beta \cdot g \cdot (T - T_0)$$

Considerando una lámina vertical de longitud L , el flujo de calor dependerá de las propiedades del fluido (ρ , μ , β , \hat{C}_p , k) y de la diferencia de temperatura (ΔT) además de la longitud característica (L) y la aceleración local de la gravedad (g).

Luego,

$$q = f(\Delta T, \beta g, \rho, k, \hat{C}_p, \mu, L)$$

Para un sistema M, L, θ, T, H y eligiendo como características a las variables βg , \hat{C}_p , q , formaremos,

$$q = \Pi_1 \cdot \Delta T^{a1} \cdot \rho^{b1} \cdot k^{c1} \cdot \mu^{d1} \cdot L^{e1}$$

$$\beta g = \Pi_2 \cdot \Delta T^{a2} \cdot \rho^{b2} \cdot k^{c2} \cdot \mu^{d2} \cdot L^{e2}$$

$$\hat{C}_p = \Pi_3 \cdot \Delta T^{a3} \cdot \rho^{b3} \cdot k^{c3} \cdot \mu^{d3} \cdot L^{e3}$$

Quedando,

$$\Pi_1 = \frac{q \cdot L}{\Delta T \cdot k} = \frac{h \cdot L}{k} = N_U$$

$$\Pi_2 = \frac{\beta g \cdot \Delta T \cdot \rho^2 \cdot L^3}{\mu^2} = \frac{\beta g \cdot \Delta T \cdot L^3}{\nu^2} = G_R$$

$$\Pi_3 = \frac{\mu \cdot \hat{C}_p}{k} = P_R$$

Resultando,

$$N_U = f(G_R, P_R)$$

donde, el número de Grashof (G_R) que relaciona las fuerzas de empuje o flotación, las de inercia y las viscosas que intervienen en la convección libre.

5.B.10. CONDUCCION NO ESTACIONARIA EN SÓLIDOS

Para el caso particular de los sólidos, la ecuación de la energía luego de introducir la ley de Fourier de la conducción quedaba:

$$\rho \hat{C}_p \frac{\partial T}{\partial \theta} = (\nabla \cdot k \nabla T)$$

que para conductividad calorífica constante (independiente de la temperatura y posición) se hace:

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{k}{\rho \cdot \hat{C}_p} \nabla^2 T \quad \text{ó} \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = \alpha \nabla^2 T$$

siendo α la difusividad térmica del sólido.

Esta se conoce también como la ecuación de Fourier de la conducción del calor y ha sido muy estudiada. No tiene en cuenta términos de generación.

De acuerdo a las condiciones iniciales y límite (estado transitorio o estacionario, geometría del sólido) se podrán obtener las diferentes soluciones.

Para el caso de conducción estacionaria unidimensional (dependiente del tiempo, flujo en una sola dirección z) observamos que:

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \quad , \quad \nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

obteniendo: $\frac{d^2 T}{dz^2} = 0$

luego,

$$T = C_1 z + C_2 \quad \text{ó} \quad T = f(\text{lineal de } z)$$

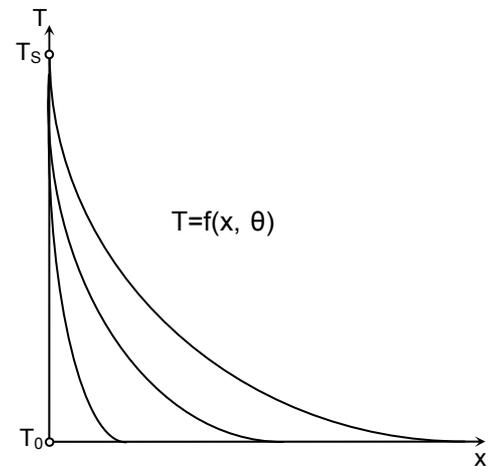
que se obtuvo de un balance envolvente.

A continuación se desarrollan diversas ecuaciones para los casos de estado no estacionario (transitorio) de conductividad, densidad y calor específico constantes.

- Flujo en lámina plana (unidimensional) $\frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{k}{\rho \hat{c}_p} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$
- Flujo en una placa (bidimensional) $\frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{k}{\rho \hat{c}_p} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right]$
- Flujo radial en un cilindro $\frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{k}{\rho \hat{c}_p} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right]$
- Flujo axial y radial en un cilindro $\frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{k}{\rho \hat{c}_p} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right]$
- Flujo radial en una esfera $\frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{k}{\rho \hat{c}_p} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right]$

Lamina semi-infinita:

Un sólido que ocupa el espacio entre $x=0$ y $x=+\infty$ está inicialmente a la temperatura T_0 . En el instante $\theta=0$ la superficie $x=0$ eleva bruscamente su temperatura a T_s y se mantiene constante para cualquier instante posterior. Como se ve en la figura, el calor comienza a “penetrar” en el sólido pero en cualquier instante, luego de un cierto espesor, la temperatura no ha variado y continúa siendo T_0 , tal como se expresa en



- Condición Inicial; $\theta \leq 0 \quad T(x, \theta) = T_0 \quad \text{para todo } x$
- Condición límite 1; $x = 0 \quad T(x, \theta) = T_s \quad \text{para cualquier } \theta > 0$
- Condición límite 2; $x = \infty \quad T(x, \theta) = T_0 \quad \text{para cualquier } \theta > 0$

La integración de la ecuación:

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Conduce a:

$$q_{x|x=0} = -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{K}{\sqrt{\pi \alpha \theta}} (T_s - T_0)$$

$$\frac{T_s - T}{T_s - T_0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\varphi e^{-\varphi^2} d\varphi = \text{erf } \varphi$$

donde erf φ se conoce como “función de probabilidad” o “función de error de Gauss”, siendo

$\varphi = \frac{x}{\sqrt{4 \cdot \alpha \cdot \theta}}$. La función es conocida y se encuentra tabulada, teniendo un intervalo (0,1).

Cuando el argumento $\varphi=1,86$ la erf=0,99; tenemos que a cierta distancia la temperatura varía menos del 1% de la diferencia $T_s - T_0$. Por lo tanto, se define un “espesor de penetración”

$$\delta_p = 3,64 \sqrt{x \cdot \theta}$$

Que para distancias $x > \delta_p$ la temperatura varía menos del 1% de la diferencia ($T_s - T_0$), o sea,

$$\frac{T_s - T}{T_s - T_0} \geq 0,99 \quad \text{si} \quad x \geq \delta_p$$

La densidad de flujo de la pared se puede calcular según,

$$q_{x|x=0} = -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{K}{\sqrt{\pi \alpha \theta}} (T_s - T_0)$$

obtenida de la expresión integrada.

Laminas finitas:

Se pueden presentar diversas posibilidades:

- Si el δ_p es pequeño con respecto al espesor de la lámina, se pueden utilizar la solución anterior con buena aproximación.
- Para una lámina infinita de espesor conocida (2b) que inicialmente se encuentra a una temperatura (T_0) y que en un instante dado ($\theta_0=0$) las superficies situadas en $x= \pm b$ se ponen bruscamente a T_s , manteniéndose la misma; se obtienen desarrollos en serie del tipo,

$$\frac{T_s - \bar{T}}{T_s - T_0} = \frac{8}{\pi^2} \left(e^{-a_1 N_{\bar{T}_0}} + \frac{1}{9} e^{-9 a_1 N_{\bar{T}_0}} + \frac{1}{25} e^{-25 a_1 N_{\bar{T}_0}} + \dots \right)$$

siendo:

- ✓ \bar{T} la temperatura media de la lámina en el instante θ
- ✓ $a_1 = \left(\frac{\pi}{2} \right)^2$

$$\checkmark \quad N_{FO} = \frac{\alpha \cdot \theta}{b^2} = \frac{k}{\rho \cdot \hat{C}_p} \cdot \frac{\theta}{b^2}$$

Siendo N_{FO} el Número adimensional de Fourier (una relación entre el calor transmitido por conducción al ganado por el elemento que equivale a un tiempo adimensional).

Esta serie converge rápidamente, así para $N_{FO} > 0,1$ se pueden despreciar todos los términos excepto el primero. Así, el tiempo requerido para un cambio de temperatura de T_0 a \bar{T} quedará,

$$\frac{T_s - \bar{T}}{T_s - T_0} = \frac{8}{\pi^2} e^{-a_1 N_{FO}}$$

tomando logaritmos;

$$\ln \left(\frac{T_s - \bar{T}}{T_s - T_0} \right) = \ln \frac{8}{\pi^2} - a_1 N_{FO}$$

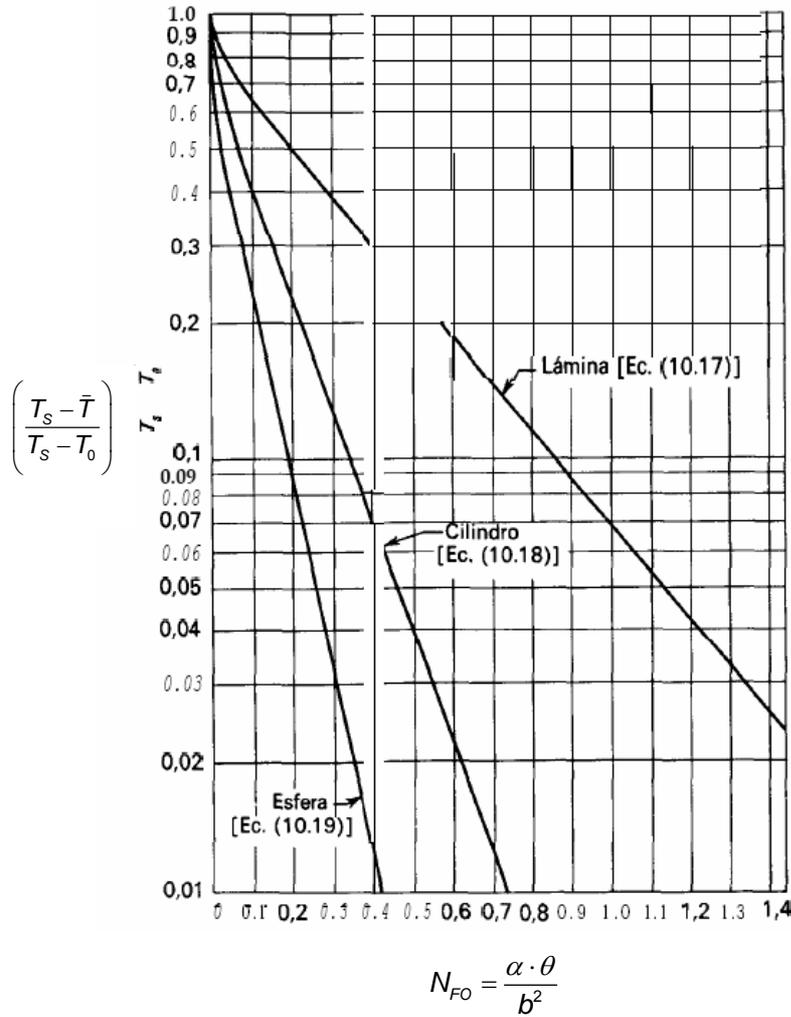
y reordenando;

$$N_{FO} = \frac{1}{a_1} \ln \left[\frac{8(T_s - T_0)}{\pi^2 (T_s - \bar{T})} \right]$$

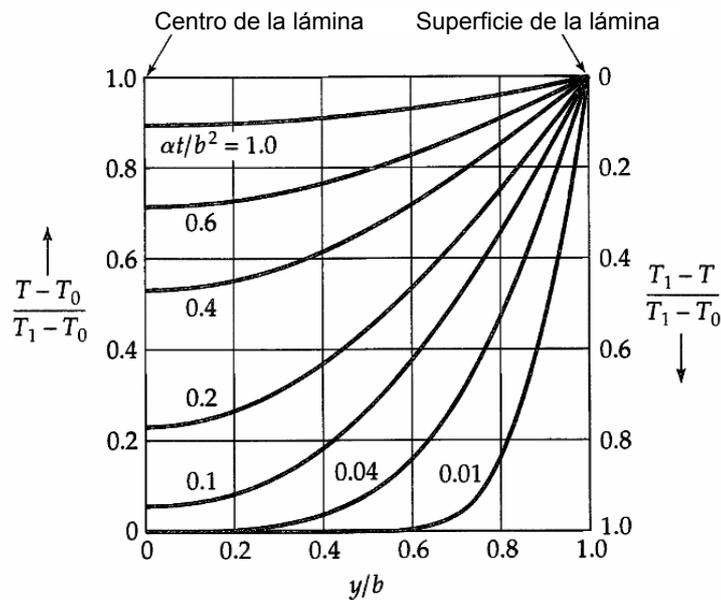
$$\theta = \frac{4b^2}{\alpha \pi^2} \ln \left[\frac{8(T_s - T_0)}{\pi^2 (T_s - \bar{T})} \right]$$

Expresiones similares se desarrollan para cilindros de longitud infinita y radio (R); y para esferas de radio (R).

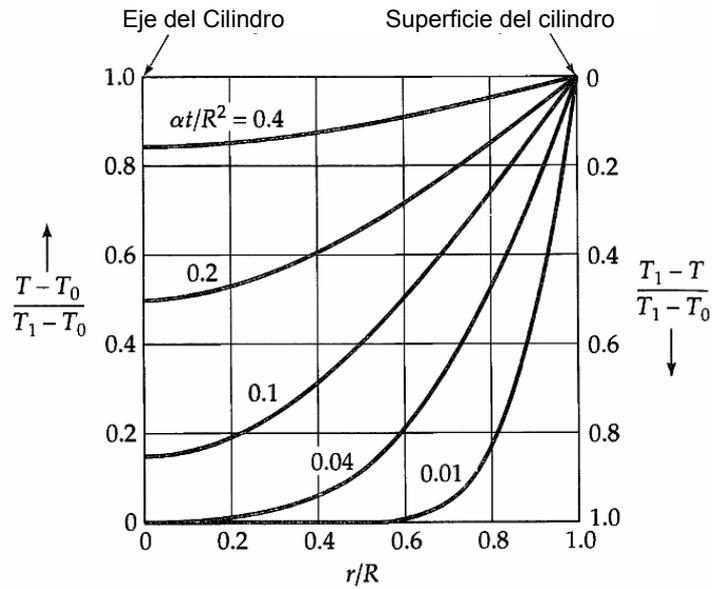
Las mismas se encuentran en la figura adjunta [tomada de Mc Cabe-Smith], que se aplican inicialmente para $T_s = \text{cte}$.



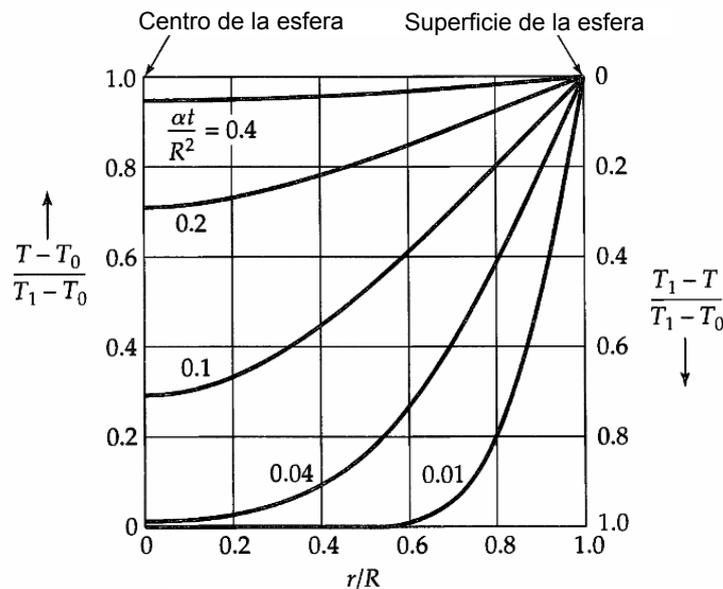
Para determinar las temperaturas locales en puntos situados en el interior de las láminas, cilindros u esferas se efectúa análisis similar, obteniendo los gráficos que se adjuntan:



Perfiles de temperatura para la conducción no estacionaria del calor en una lámina de espesor finito



Perfiles de temperatura para la conducción del calor en régimen no estacionario en un cilindro



Perfiles de temperatura para la conducción del calor en régimen no estacionario en una esfera

Cuando la temperatura T_s es distinta de la del medio que la rodea porque la resistencia térmica de la superficie es lo suficientemente grande para provocar variaciones de temperatura se incluye un nuevo grupo adimensional de esta resistencia ($k/h r$), tal como aparece en la figura siguiente, para un cilindro macizo de longitud infinita, siendo ahora T_s la temperatura de los alrededores (del medio) y “x” la distancia del centro al punto considerado.

Los métodos de resolución son ampliamente utilizados, ya que las soluciones analíticas son engorrosas.

Los procesos que incluye el estudio de la transmisión de calor en estado no-estacionario incluye los problemas de arranque y parada, tratamientos térmicos (templado), vulcanizado, termofraguado, meteorología y otros, donde asumir condiciones estacionarias significa cometer un error considerable.

En el diagrama de Gurley-Lurie, las coordenadas son:

- Ordenada; cambio relativo de temperatura,

$$y = \frac{T_s - T}{T_s - T_0}$$

- Abscisa; tiempo adimensional,

$$x = \frac{\alpha \cdot \theta}{R^2}$$

- Parámetro de resistencia relativa,

$$m = \frac{k}{R \cdot h}$$

- Parámetro de posición adimensional,

$$n = \frac{r}{R}$$

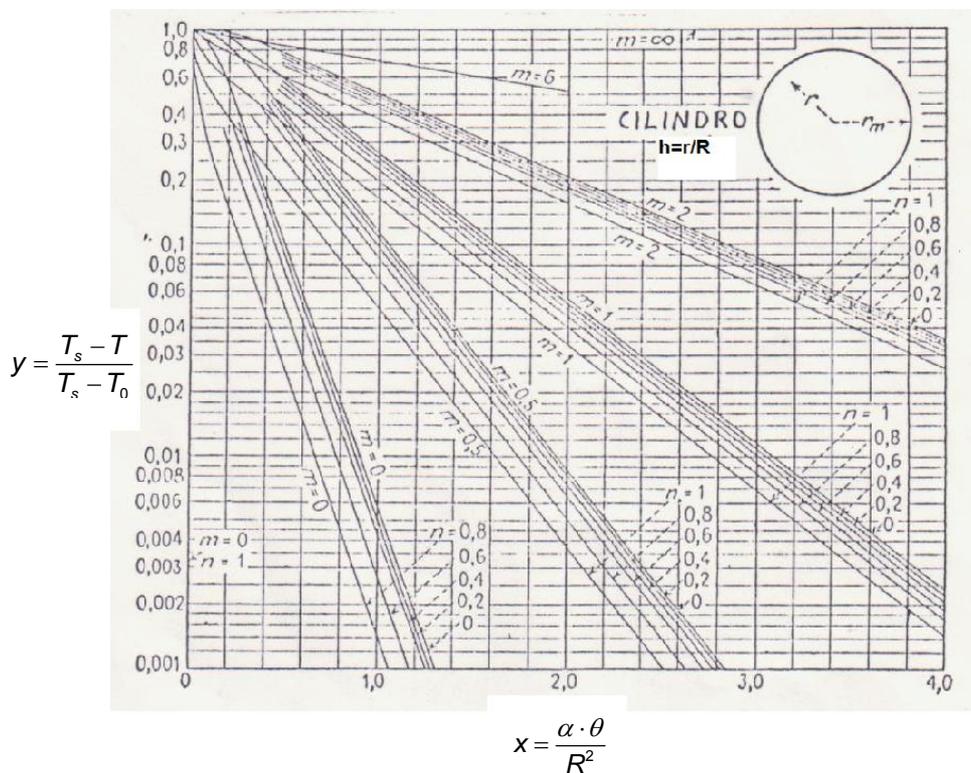


Diagrama Gurney-Lurie para Cilindros Largos

TEMA 5.B - APENDICE

COMPROBACION DE LA IDENTIDAD TENSORIAL:

En la sección 5.B.2 (página 14) se utiliza la identidad

$$(\nabla \cdot [\tau \cdot v]) = (v \cdot [\nabla \cdot \tau]) + (\tau : \nabla v)$$

válida para el tensor simétrico esfuerzo.

Recordando que;

$$(\nabla \cdot [\tau \cdot v]) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j \tau_{ij} v_j \right) = \sum_i \sum_j \frac{\partial}{\partial x_i} \tau_{ij} v_j \quad [A1]$$

$$(v \cdot [\nabla \cdot \tau]) = \sum_j v_j \left(\sum_i (\nabla \cdot \tau)_{ij} \right) = \sum_j \sum_i v_j \frac{\partial}{\partial x_i} \tau_{ij} \quad [A2]$$

$$(\tau : \nabla v) = \sum_i \tau_{ij} \left(\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} v_i \right) = \sum_j \sum_i \tau_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} v_i \quad [A3]$$

donde la ecuación [A3] se obtiene de restar la [A2] de la [A1].

Para una mejor ilustración se desarrollaran las anteriores en sus componentes cartesianos.

A.a) Diferencial del producto Vectorial (o de punto) $[\tau \cdot v]$;

$$(\nabla \cdot [\tau \cdot v]) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} [\tau \cdot v]_i$$

Desarrollo;

$$(\nabla \cdot [\tau \cdot v]) = \frac{\partial}{\partial x} [\tau_{xx} v_x + \tau_{xy} v_y + \tau_{xz} v_z] + \frac{\partial}{\partial y} [\tau_{yx} v_x + \tau_{yy} v_y + \tau_{yz} v_z] + \frac{\partial}{\partial z} [\tau_{zx} v_x + \tau_{zy} v_y + \tau_{zz} v_z]$$

El vector $[\tau \cdot v]$ difiere de v tanto en dirección como longitud, es decir, se da un nuevo vector.

Esto se cumple en coordenadas cartesianas, pudiéndose transformar a otros sistemas coordenados.

A.b) Producto escalar del vector v por el $[\nabla \cdot \tau]$

$$(v \cdot [\nabla \cdot \tau]) = \sum_j v_j [\nabla \cdot \tau]_j = \sum_j \sum_i v_j \frac{\partial}{\partial x_i} \tau_{ij}$$

Desarrollo;

$$(v \cdot [\nabla \cdot \tau]) = v_x \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + v_y \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} + v_z \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xz}$$

$$\begin{aligned}
 & +v_x \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yx} + v_y \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yy} + v_z \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yz} + \\
 & +v_x \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zx} + v_y \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zy} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zz} = \\
 & = v_x \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zx} \right) + v_y \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zy} \right) + v_z \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yz} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zz} \right)
 \end{aligned}$$

A.c) Producto escalar del tensor τ con la diada ∇v ;

$$(\tau : \nabla v) = \sum_i \sum_j \tau_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} v_i$$

Desarrollo;

$$\begin{aligned}
 (\tau : \nabla v) &= \tau_{xx} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial v_x}{\partial y} + \tau_{xz} \frac{\partial v_x}{\partial z} + \tau_{yx} \frac{\partial v_y}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v_y}{\partial y} + \tau_{yz} \frac{\partial v_y}{\partial z} + \tau_{zx} \frac{\partial v_z}{\partial x} + \tau_{zy} \frac{\partial v_z}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial z} = \\
 &= \tau_{xx} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v_y}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial z} + \tau_{yx} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \tau_{zy} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) + \tau_{xz} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)
 \end{aligned}$$

5.C. CAPA LÍMITE TÉRMICA - TURBULENCIA

5.C.1. INTRODUCCIÓN

El flujo de calor por convección entre un fluido en movimiento y una superficie sólida es uno de los casos más comunes e importantes de la transmisión del calor. En el desarrollo de las ecuaciones de variación, esta situación no se ha tratado con detalle, ya que solo hemos presentado anteriormente la llamada “ley de enfriamiento de Newton” como una expresión que relaciona el flujo de calor con las diferencias de temperaturas en la interfase sólido-fluido. El coeficiente de transmisión del calor (h) así definido se relaciona con el mecanismo del flujo del fluido, con las propiedades físicas del mismo, con la geometría del sistema en estudio, con las temperaturas de la superficie y del fluido (que habrá que definir convenientemente) y con el estado de la superficie sólida.

Ya se ha postulado anteriormente que las partículas de fluido adyacentes a la superficie permanecen estacionarias con respecto a esta, existiendo una delgada película cercana a la frontera sólida que se mueve en flujo laminar cualquiera sea la naturaleza del flujo de la corriente global del fluido. Por esto, el transporte de cualquier propiedad, como en este caso el calor, se realizará esencialmente por un mecanismo molecular, que se denomina como conducción del calor, resultando de aplicación la ecuación de Fourier de la transmisión del calor.

5.C.2. DESARROLLO DE LA CAPA LIMITE

Para este caso se puede extender la solución de Blasius para una capa límite hidrodinámica isotérmica, considerando que el flujo se hace a lo largo de una lámina plana axial, cuya superficie se encuentra a la temperatura T_s , mientras que el fluido se aproxima a una velocidad v_∞ y una temperatura T_∞ . Se propone que la temperatura de la lámina sea mayor que la de aproximación del fluido, de manera que el fluido recibe un flujo de energía calorífica. Este flujo de calor en las inmediaciones de la superficie es casi exclusivamente por conducción, regido por la ecuación de Fourier, modifica la temperatura del fluido que circula por esa región y origina un gradiente de temperatura que está limitado a una capa próxima a la interfase que varía su temperatura desde T_s en la pared hasta T_∞ en el límite exterior. Esta región se denomina “*capa límite térmica*”.

Aplicando la ecuación de la energía en forma bidimensional, se puede lograr una solución equivalente a las obtenidas a partir de la ecuación de continuidad y del movimiento isotérmicas, mostrando que la variación del espesor de ambas capas límites en régimen laminar dependen de funciones equivalentes.

Se observa que para el caso en el que el número de Prandtl es la unidad ($Pr = 1$) las dos capas límites son idénticas, cumpliéndose las siguientes condiciones:

- $Pr = 1$; los espesores son iguales ($\delta_h = \delta_T$).
- $Pr > 1$; la hidrodinámica es mayor que la térmica ($\delta_h > \delta_T$).
- $Pr < 1$; la térmica es mayor que la hidrodinámica ($\delta_h < \delta_T$).

Las relaciones entre ambas cumplen muy aproximadamente la siguiente relación $\frac{\delta_h}{\delta_T} = N_{Pr}^{1/3}$; la que combinada con la ley de enfriamiento de Newton y la ecuación de Fourier de la conducción, permite obtener un coeficiente de transmisión del calor basado en la distancia axial al borde de ataque (h_x), que se expresa mediante:

$$h_x = 0,332 \cdot \left(\frac{k}{x}\right) \cdot Re_x^{1/2} \cdot Pr^{1/3}$$

ó

$$N_U \equiv \left(\frac{h_x \cdot x}{k}\right) = 0,332 \cdot \left(\frac{k}{x}\right) \cdot Re_x^{1/2} \cdot Pr^{1/3}$$

Para la capa límite hidrodinámica, su desarrollo se inicia justamente en el borde de ataque aumentando su espesor a medida que nos alejamos del mismo. En el caso de una superficie a distinta temperatura que el fluido, esta no necesariamente coincide con el borde, por lo que su desarrollo puede comenzar a cierta distancia de aquel, existiendo una capa límite hidrodinámica cuando comienza a formarse la capa límite térmica.

Las soluciones analíticas exactas, para el caso de un fluido de propiedades físicas constantes, que circula en estado estacionario a lo largo de una superficie plana de temperatura constante, permiten calcular el perfil de temperaturas con cierta aproximación, siendo la siguiente una de las más difundidas;

$$T^* = 2 \cdot \left(\frac{y}{\delta_h \cdot \Delta}\right) - 2 \cdot \left(\frac{y}{\delta_h \cdot \Delta}\right)^3 + \left(\frac{y}{\delta_h \cdot \Delta}\right)^4$$

donde,

$$T^* = \frac{(T_s - T)}{(T_s - T_\infty)}, \quad \delta_h = \sqrt{\left(\frac{1260}{37}\right) \cdot \left(\frac{v \cdot x}{v_\infty}\right)},$$

La anterior es válida para la región laminar que se extiende en la dirección del flujo, desde el borde de ataque hasta una distancia axial crítica (x_{crit}), donde se cumple que:

$$Re_{x_{crit}} = \frac{x_{crit} \cdot \rho \cdot v_\infty}{\mu} \geq 10^5$$

En cualquier caso, ya conocemos que cuando se produce el ingreso de fluido a un conducto, la capa límite hidrodinámica aumenta su espesor y a partir de cierta distancia alcanza el centro del conducto, permitiendo distinguir entre la región “de entrada” y la región “de flujo completamente desarrollado”, donde los perfiles de velocidad son independientes de la distancia axial.

Cuando la superficie del conducto se encuentra a distinta temperatura del fluido, también la capa límite térmica llega al centro del mismo a una determinada distancia de la entrada y a partir de esa posición el perfil de temperatura se encuentra totalmente desarrollado. Sin embargo, a diferencia de lo que ocurre con el perfil de velocidad, para conductos muy largos el perfil de temperatura se va haciendo más plano y prácticamente toda la temperatura del fluido alcanza la de la pared, desapareciendo los gradientes de temperatura y cesando la transmisión del calor.

La aplicación de la solución de Blasius a la capa límite es conveniente pero sus alcances resultan muy acotados a superficies planas y flujo laminar.

Para el flujo turbulento en conductos se puede plantear un análisis similar, pero la obtención de la solución resulta mucho más complicada y excede los alcances de este curso. Para abordar el problema se utilizarán métodos basados en el análisis dimensional y en las analogías entre transporte de cantidad de movimiento y calor.

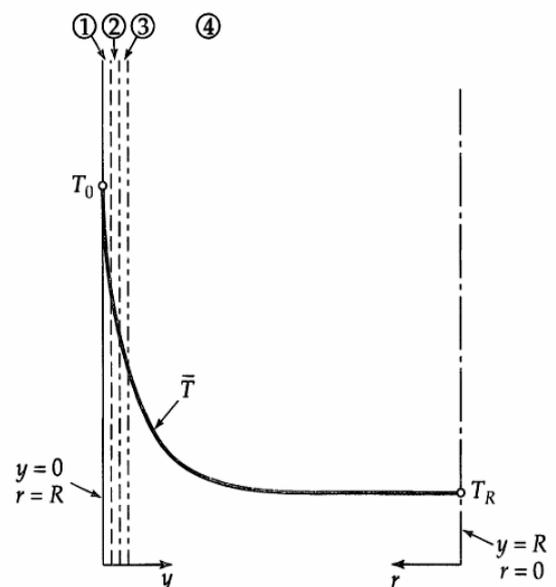
5.C.3. TURBULENCIA Y PERFILES DE TEMPERATURA

Para un flujo en un conducto podemos asumir que existen 4 zonas (no muy bien definidas):

1) Región laminar, sin actividad de remolinos con transferencia por conducción, con gran caída de temperatura. Subcapa viscosa.

2,3) Regiones de transición.

4) Región turbulenta, central, el transporte de energía por el movimiento viscoso de remolinos, con temperatura constante.



Temperatura de tiempo ajustado

Para mediciones precisas:

- $T = \bar{T} + T'$

- $\overline{T'} = 0$
- $\overline{v_x'T'}, \overline{v_y'T'}, \overline{v_z'T'} \neq 0$

Ecuación Alisada

Para fluidos de ρ , C_p , μ , k constantes y aplicando la ecuación de energía:

$$\rho \hat{C}_p \frac{\partial T}{\partial \theta} = - \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho \hat{C}_p v_x T + \frac{\partial}{\partial y} \rho \hat{C}_p v_y T + \frac{\partial}{\partial z} \rho \hat{C}_p v_z T \right) + k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \mu \left[2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \dots \right]$$

y substituyendo, T por $\overline{T} + T'$ y v_x por $v_x + v_x'$ se obtiene la ecuación promediada en el tiempo:

$$\begin{aligned} \rho \hat{C}_p \frac{\partial \overline{T}}{\partial \theta} = & - \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho \hat{C}_p \overline{v_x T} + \frac{\partial}{\partial y} \rho \hat{C}_p \overline{v_y T} + \frac{\partial}{\partial z} \rho \hat{C}_p \overline{v_z T} \right) \\ & - \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho \hat{C}_p \overline{v_x' T'} + \frac{\partial}{\partial y} \rho \hat{C}_p \overline{v_y' T'} + \frac{\partial}{\partial z} \rho \hat{C}_p \overline{v_z' T'} \right) \\ & + k \left(\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial z^2} \right) \\ & + \mu \left[2 \left(\frac{\partial \overline{v_x}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{v_x}}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \overline{v_x}}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \overline{v_y}}{\partial x} \right) + \dots \right] \\ & + \mu \left[2 \overline{\left(\frac{\partial v_x'}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v_x'}{\partial x} \right)} + \overline{\left(\frac{\partial v_x'}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v_x'}{\partial y} \right)} + 2 \overline{\left(\frac{\partial v_x'}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v_y'}{\partial x} \right)} + \dots \right] \end{aligned}$$

Aparecen nuevos términos que están relacionados con los procesos turbulentos de remolino.

Definiendo la Densidad de Flujo Turbulento de Energía cuyos componentes son:

$$\overline{q_x^{(t)}} = \rho \hat{C}_p \overline{v_x' T'} \quad ; \quad \overline{q_y^{(t)}} = \rho \hat{C}_p \overline{v_y' T'} \quad ; \quad \overline{q_z^{(t)}} = \rho \hat{C}_p \overline{v_z' T'}$$

y la función de Disipación Turbulenta:

$$\overline{\Phi_v^{(t)}} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\overline{\left(\frac{\partial v_i'}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial v_i'}{\partial x_j} \right)} + \overline{\left(\frac{\partial v_i'}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial v_j'}{\partial x_i} \right)} \right)$$

y las tres ecuaciones de variación para flujo turbulento de fluidos con ρ , C_p , μ , k constantes:

- Ecuación de Continuidad de Tiempo Ajustado $(\nabla \cdot \overline{v}) = 0$

- Ecuación de Movimiento de Tiempo Ajustado $\rho \frac{D\bar{v}}{D\theta} = -\nabla \bar{p} - \left[\nabla \cdot \left(\bar{\tau}^{(v)} + \bar{\tau}^{(t)} \right) \right] + \rho g$
- Ec. de Energía de Tiempo Ajustado $\rho \hat{C}_p \frac{DT}{D\theta} = - \left(\nabla \cdot \left(\bar{q}^{(v)} + \bar{q}^{(t)} \right) \right) + \mu \left(\bar{\Phi}_v^{(v)} + \bar{\Phi}_v^{(t)} \right)$

Conductividad de Remolino

$$\bar{q}_y^{(t)} = -k^{(t)} \frac{d\bar{T}}{dy} \quad k^{(t)} = \text{Conductividad de Remolino}$$

k^(t) depende de la posición, dirección y naturaleza del flujo turbulento

- La Viscosidad Cinemática de Remolino $\nu^{(t)} = \frac{\mu^{(t)}}{\rho}$
- La Difusividad Térmica de Remolino $\alpha^{(t)} = \frac{k^{(t)}}{\rho \cdot \hat{C}_p}$

La relación: $\frac{\nu^{(t)}}{\alpha^{(t)}} = \frac{\frac{\mu^{(t)}}{\rho}}{\frac{k^{(t)}}{\rho \cdot \hat{C}_p}}$ está entre 0,5 y 1.

5.C.4. ANALOGÍAS ENTRE TRANSPORTE DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO Y CALOR

Se ha observado por los tratamientos anteriores que existen muchas similitudes entre los mecanismos de transporte de cantidad de movimiento y de calor, tanto a nivel descriptivo como cuantitativo, por lo que se puede plantear que ambos fenómenos pueden ser tratados por razonamientos equivalentes. Esto permite obtener relaciones que describen el transporte de energía calorífica por medio de analogías, siendo O. Reynolds el primero que postuló y presentó un estudio que relacionaba ambos fenómenos de transporte.

No obstante que posteriormente, pretendiendo lograr un mayor rigor, las analogías se han desarrollado partiendo de diversos enfoques, resulta oportuno hacer un desarrollo simplificado a partir de la idea original de Reynolds.

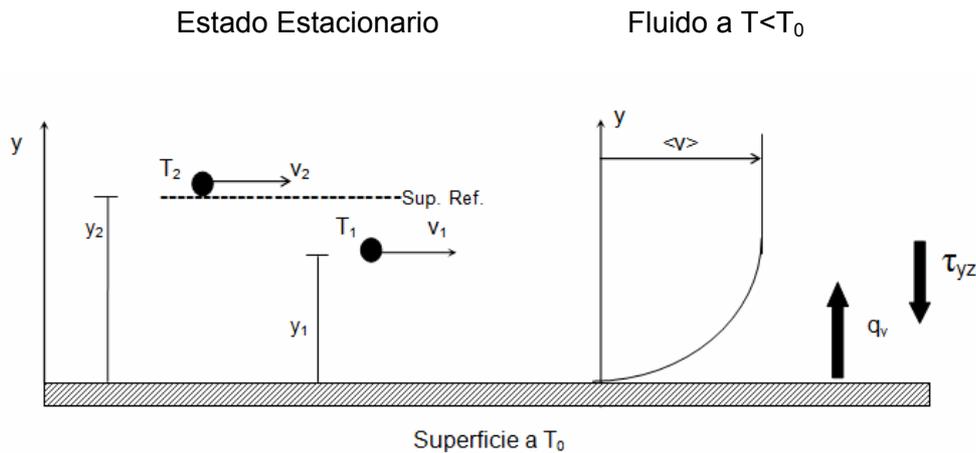
LA ANALOGÍA DE REYNOLDS

Ya se ha descrito que para el movimiento de un fluido en régimen turbulento, en contacto con una superficie sólida, se pueden reconocer tres regiones de flujo que no tienen fronteras demarcadas; una en las inmediaciones de la pared donde el movimiento es esencialmente

laminar porque predominan las fuerzas viscosas y donde prácticamente no se encuentran torbellinos, otra intermedia de transición o tampón con transporte de cantidad de movimiento tanto por efectos viscosos como turbulentos y la más lejana donde casi exclusivamente predominan los esfuerzos turbulentos de Reynolds.

En el transporte de calor desde o hacia la superficie de interfase fluido-sólido, se encuentra superpuesto un gradiente de temperaturas en las regiones apuntadas.

Haciendo una simplificación muy grande, supongamos que:



Si un torbellino en particular, con determinados valores medios de temperatura y velocidad de tiempo ajustado de acuerdo con su posición transversal, atraviesa la superficie de referencia en dirección Y positiva, arrastra consigo la cantidad de movimiento y energía. Otro debe atravesarla en dirección contraria; luego para el estado estacionario y en la posición transversal definida, cualquiera sea la distancia a la pared se deberá cumplir que:

$$\frac{\text{Transporte de calor por turbulencia}}{\text{Transporte de calor por conducción}} = \frac{\text{Transporte de cantidad de movimiento por turbulencia}}{\text{Transporte de cantidad de movimiento por esfuerzos viscosos}}$$

Para el transporte desde la zona central a la interfase, considerando que todas las magnitudes son alisadas o de tiempo ajustado, podemos decir:

$$\frac{\text{Velocidad transferencia calor}}{\text{Velocidad transferencia cantidad movimiento}} = \frac{q|_{pared}}{\tau|_{pared}} = \frac{\hat{C}_p \cdot (T_0 - T)}{\langle v \rangle}$$

Reordenando y considerando que la fuerza que ejerce el fluido sobre el sólido en la superficie está relacionada con la densidad de flujo de transporte viscoso de cantidad de movimiento en la superficie, se puede expresar que:

$$\frac{q_0}{\rho \cdot \langle v \rangle \cdot \hat{C}_p \cdot \Delta T} = \frac{\tau_0}{\rho \cdot \langle v \rangle^2}$$

Siendo:

- $\Delta T = T_o - T$
- $F_k = \left(\frac{1}{2} \rho \langle v \rangle^2 \right) \cdot f \cdot A$
- $\tau_o = \frac{F_k}{A}$
- $q_o = h \cdot (T_o - T)$

Reemplazando:

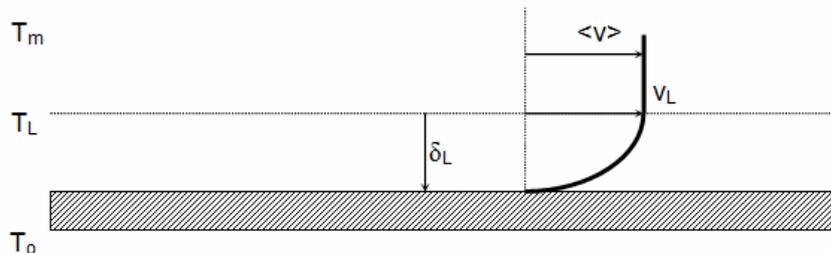
$$\frac{h}{\rho \cdot \hat{C}_p \cdot \langle v \rangle} = \frac{1}{2} f = S_T = \frac{N_U}{Re \cdot Pr}$$

La expresión anterior es adimensional y permite combinar el coeficiente de fricción de Fanning con el coeficiente de transmisión del calor. No tiene en cuenta la subcapa viscosa (región laminar), no obstante es muy aproximada si $Pr = 1$. El “Número de Stanton” (N_{ST} ó S_T) representa la relación entre el calor transferido en la interfase con el calor que transporta el fluido por convección. Resulta de la combinación de tres números adimensionales: el número de Reynolds, el número de Prandtl y el número de Nusselt, de acuerdo a las siguientes relaciones:

$$S_T \equiv \frac{N_U}{Re \cdot Pr} = \left[\left(\frac{h \cdot L_{caract}}{k} \right) \cdot \left(\frac{\mu}{\rho \cdot v_z \cdot L_{caract}} \right) \cdot \left(\frac{k}{\hat{C}_p \cdot \mu} \right) \right]$$

ANALOGÍA DE TAYLOR-PRANDTL

Se tiene en cuenta la región laminar (subcapa viscosa):



Región Laminar:

- Transferencia de calor exclusivamente por conducción.

- Transferencia de cantidad de movimiento por viscosidad del fluido.

Región Turbulenta:

- Transferencia de calor por convección turbulenta.
- Transferencia de cantidad de movimiento por remolino.

Para las cercanías de la pared:

- $\tau_0 = -\mu \frac{dv_x}{dy} = \mu \frac{v_L}{\delta_L}$ (v_L es función lineal de y)
- $q_0 = -k \frac{dT}{dy} = -k \frac{(T_L - T_0)}{\delta_L}$ (T es función lineal de y)

1- Régimen Laminar

$$\frac{q_0}{\tau_0} = \frac{k \cdot (T_L - T_0)}{\mu \cdot v_L} \cdot \frac{\hat{C}_p}{\hat{C}_p} = \frac{\hat{C}_p \cdot (T_L - T_0)}{\text{Pr} \cdot v_L}$$

2- Régimen turbulento

$$\frac{q^{(t)}}{\tau^{(t)}} = -\hat{C}_p \cdot \frac{(T_m - T_L)}{\langle \bar{v} \rangle - v_L} \quad \text{según Analogía de Reynolds}$$

Luego:

- 1- $\frac{q}{\tau_0} \cdot \text{Pr} \cdot v_L = -\hat{C}_p \cdot (T_L - T_0)$
- 2- $\frac{q^{(t)}}{\tau^{(t)}} \cdot (\langle \bar{v} \rangle - v_L) = -\hat{C}_p \cdot (T_m - T_L)$

Sumando:

$$\frac{q}{\tau_0} \cdot [\text{Pr} \cdot v_L + (\langle \bar{v} \rangle - v_L)] = \hat{C}_p (T_0 - T_m)$$

Reordenando:

$$\frac{q}{\rho \cdot \langle \bar{v} \rangle \cdot \hat{C}_p \cdot \Delta T} = \frac{\tau_0}{\rho \cdot \langle \bar{v} \rangle^2} \cdot \left[\frac{1}{1 + \frac{v_L}{\langle \bar{v} \rangle} (\text{Pr} - 1)} \right]$$

ó

$$S_T = \frac{\frac{1}{2}f}{\left[1 + \frac{V_L}{V_m}(\text{Pr}-1)\right]} \quad \text{donde} \quad v_L \cong 10 \cdot \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}}$$
$$\frac{v_L}{\langle v \rangle} \cong \text{Re}^{-1/8}$$