

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

FACULTAD REGIONAL ROSARIO

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA QUÍMICA

FENÓMENOS DE TRANSPORTE

NOTAS DE CÁTEDRA: “UNIDAD TEMÁTICA 3”

- **CAPA LÍMITE HIDRODINÁMICA**
 - **TURBULENCIA**

Revisión: Julio 2008

“La presente es una recopilación de diversas notas y apuntes de cátedra dispersas que fueron elaboradas o redactadas en los últimos años. Se agradece especialmente la colaboración de los alumnos cursantes en 2008: Fernandez, Rebeca; Forestieri, Sebastián; Molina, Ignacio; Saravia, Aldana; Vignatti, Maximiliano; Guidolin, Franco; Levalle, Melina; Maran, Débora; Sosa, Maximiliano; Tzirimis, Noelia para su compilación y organización, que con la coordinación del Auxiliar Juan M. Dominguez permite disponer de esta versión revisada. Se advierte que estas notas son solo una guía para el estudio, debiendo consultarse la bibliografía recomendada en cada tema para lograr un conocimiento pleno de los mismos.”

Cátedra de Fenómenos de Transporte

Ing. Jorge E. Robin

Ing. Marcela N. Kaminsky

Juan M. Dominguez

INTRODUCCIÓN

▪ **CLASIFICACIÓN DE FLUJOS**

Un fluido viscoso con un campo de movimiento correspondiente a fronteras rígidas conocidas, presenta características de flujo, distribuciones de velocidad y presión de acuerdo a las magnitudes relativas de fuerzas viscosas e inerciales.

Este hecho conduce a dos conceptos importantes para su clasificación y tratamiento analítico; uno de ellos es distinguir entre flujo "laminar" y "turbulento"; el otro estudia el flujo de "capa límite". Estudiaremos brevemente cada concepto.

▪ **FLUJO LAMINAR Y TURBULENTO**

La existencia de dos formas de movimiento fue observada experimentalmente ya en el siglo pasado por Hagen; así para velocidades bajas, el flujo descargado en un tubo cilíndrico es liso como una barra sólida, pero por encima de cierto límite la superficie es oscilante y el flujo sale a borbotones.

En una experiencia clásica, O. Reynolds pudo observar, inyectando a través de un capilar una corriente coloreada a un flujo principal de agua que circulaba por un tubo de vidrio recto, que para caudales pequeños la corriente de tintura se conservaba sin mezclar y se desplazaba en forma rectilínea por el tubo. Cuando se aumentaba el caudal de agua, la vena coloreada comenzaba a oscilar, entrecortándose a medida que aumentaba el fluido de la corriente principal y dando lugar a un flujo uniformemente coloreado.

El flujo, cuando la vena no está perturbada, se denomina Flujo Laminar o Viscoso, y corresponde a un desplazamiento de fluido en forma de láminas que se deslizan unas sobre otras, sin mezcla macroscópica entre ellas y con trayectorias de partículas fácilmente predecibles. Esta forma de flujo se encuentra cuando la influencia predominante son los esfuerzos tangenciales viscosos causados por el transporte molecular de cantidad de movimiento entre las capas de fluido adyacentes.

Cuando aparecen las perturbaciones, se puede interpretar que las fuerzas viscosas e inerciales alcanzan el mismo orden de magnitud, dando lugar a un flujo en la denominada Región Crítica o de Transición.

Por último, se denomina Flujo Turbulento cuando se observa la mezcla homogénea del colorante con el flujo principal, ya que aparecen componentes de velocidad transversales a la dirección del flujo creando un estado de agitación que origina remolinos, razón por la cual ocurre la mezcla de la tintura con el fluido de la corriente principal. En este caso, las partículas de fluidos tienen movimientos irregulares, casi al azar, de trayectorias fluctuantes y erráticas. La mezcla macroscópica resultante es tanto lateral como axial al flujo, y aquí las fuerzas inerciales predominan sobre las fuerzas viscosas tangenciales.

3.A. CAPA LIMITE HIDRODINÁMICA

▪ CONCEPTO DE CAPA LÍMITE

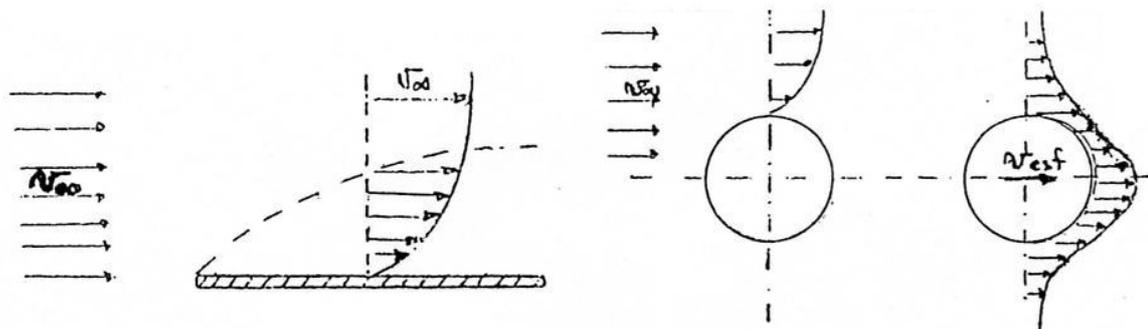
Recordemos que se estableció que en las fronteras sólido-líquido no existía deslizamiento, es decir la velocidad del fluido en la interfase es nula. A raíz de esto, el gradiente de velocidad y el esfuerzo cortante es máximo en la frontera y disminuye hacia el interior del fluido.

Para fluidos reales se observa que cerca de la pared la pendiente del gradiente de velocidad es muy grande y el único esfuerzo tangencial viscoso de importancia se encuentra dentro de una capa delgada, próxima a la frontera. Fuera de la capa, los gradientes de velocidad disminuyen rápidamente y el esfuerzo tangencial viscoso es muy pequeño.

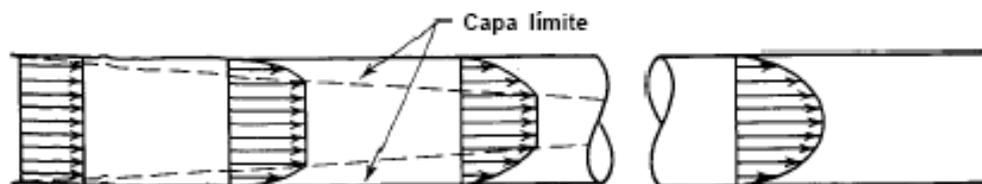
Esa zona estrecha se llama capa límite, y dentro de ella los esfuerzos viscosos sobrepasan los inerciales, originando una deformación del fluido.

Por fuera de la capa el flujo sufre una influencia pequeña de las fuerzas de viscosidad y vendrá determinado (el flujo) por la relación entre la inercia, el gradiente de presión y las fuerzas del cuerpo. Este concepto se puede demostrar para flujo sobre una capa delgada y alrededor de un cilindro, para las condiciones de no deslizamiento en las fronteras.

Así, aunque aguas arriba de la placa y el cilindro, el fluido tiene velocidad uniforme, al pasar sobre los objetos será cero en la interfase sólido-líquido y se establece el gradiente de velocidades hasta una cierta distancia de la misma frontera. Esta distancia se conoce como "espesor de la capa límite"; fuera de esta la única modificación que sufre es una ligera deformación de las líneas de corrientes:



También a lo largo de conductos se forman capas límites, así sobre dos placas paralelas se desarrolla ésta. Aunque, luego de una cierta "longitud de entrada" ambas se ponen en contacto estableciendo un flujo uniforme. En la longitud de entrada son no uniformes.

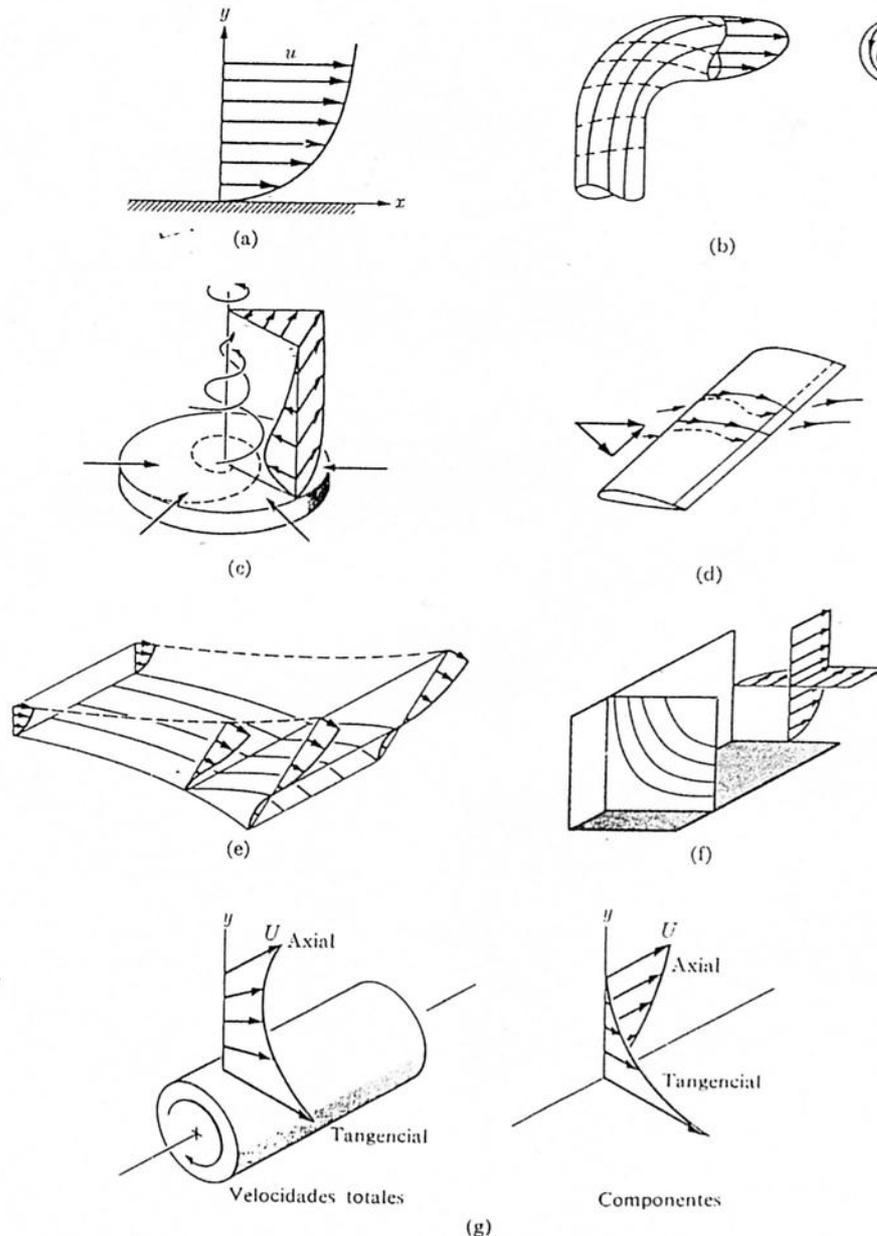


Desarrollo del flujo de capa límite en un tubo

▪ **DESARROLLO DE LA CAPA LÍMITE**

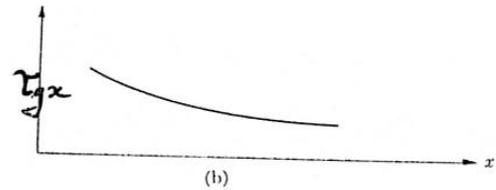
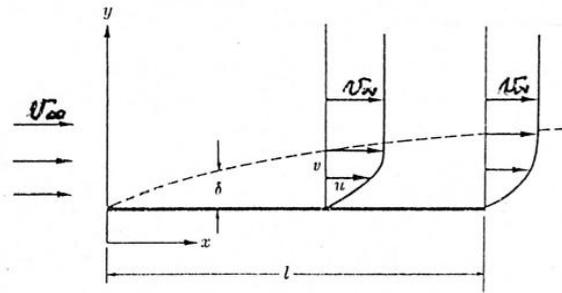
Los flujos en capas límites pueden ser bidimensionales o tridimensionales; en el primer caso los vectores velocidad están en planos paralelos, en cambio en los casos tridimensionales podrán ser coplanares pero divergirán lateralmente, o más comúnmente serán oblicuas (no-coplanares).

Como muchos casos prácticos son bidimensionales se pueden utilizar formas simplificadas de las ecuaciones del movimiento. En el caso tridimensional deben usarse las ecuaciones en su forma completa.



Capas límite bi y tridimensionales: (a) capa límite bidimensional, velocidades relativas a las paredes; (b) flujos secundarios en una tubería curva; (c) rotación por encima de la superficie terrestre; (d) flujos cruzados sobre un ala desviada; (e) flujo divergente; (f) flujo de esquina; (g) velocidad axial de un flujo sobre cilindros en rotación.

Para el caso de una superficie plana, lisa, siendo x una variable medida desde el borde inicial de la placa y v_1 la velocidad fuera de la capa límite, se encuentra experimentalmente,



$$\delta \propto \frac{\sqrt{\mu x}}{\sqrt{\rho v_\infty}} \propto \frac{x}{\sqrt{N_{Re_x}}}$$

Condición de capa límite delgada la constante de proporcionalidad es aproximadamente 5, para v/v_∞

Donde N_{Re_x} es un número de Reynolds cuya longitud característica es la distancia x al borde de la placa:

$$N_{Re_x} = \frac{v_\infty \rho x}{\mu}$$

Se observa que cuando N_{Re_x} es grande la capa límite debe ser delgada. Para la placa de longitud l será entonces:

$$\delta \propto \frac{l}{\sqrt{N_{Re_x} l}}$$

Blausius determinó en base a la suposición de que la relación:

$$\frac{v}{v_\infty} = \varphi\left(\frac{y}{\delta}\right) ; \delta = \frac{5x}{\sqrt{N_{Re_x}}} ; \varphi = \frac{0,664x}{\sqrt{N_{Re_x}}} ; \delta^* = \frac{1,73x}{\sqrt{N_{Re_x}}}$$

Asimismo se puede determinar otro número de Reynolds en función del espesor de la capa, es decir con δ como longitud característica:

$$N_{Re_\delta} = \frac{v_\infty \rho \delta}{\mu}$$

Cuyas relaciones son: $N_{Re_\delta} \propto \sqrt{N_{Re_x}}$

Para capa límite bidimensional, el esfuerzo tangencial se puede escribir:

$$\tau_{yx} = -\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \cong \mu \frac{dv_x}{dy} \qquad \tau_{yx} = \frac{0,664}{\sqrt{N_{Re_x}}} \rho \frac{dv_\infty^2}{2} \quad \text{Según Blausius}$$

Se notará que para valores de v_∞ , ρ , μ fijados, el N_{Re_x} es proporcional a x y el espesor δ aumenta con $x^{1/2}$; es decir, el gradiente de velocidad dv_x/dy disminuye al aumentar x , y por consiguiente también lo hace el τ_{yx}

Como a distancias mayores de la superficie las velocidades pueden ser grandes, aunque a menores que la velocidad del fluido no-distorsionado, es posible que el flujo sea de naturaleza turbulenta.

Es así que una capa límite puede constar de tres zonas; una subcapa viscosa o laminar, una de transición y otras zonas turbulenta. Eventualmente la capa límite puede ser enteramente laminar, pero en los casos importantes tendrá las tres zonas.

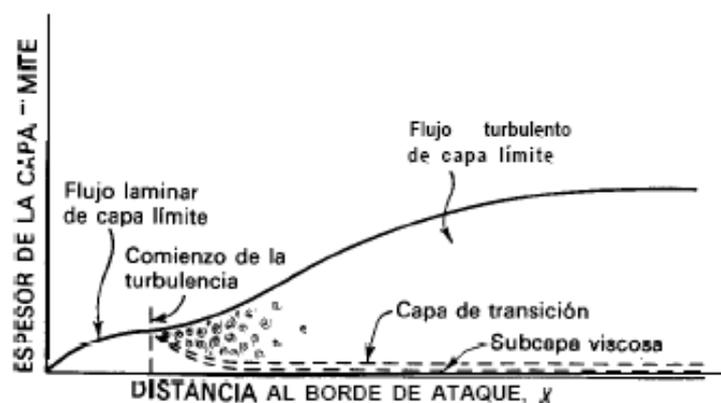
▪ CAPA LÍMITE EN LÁMINA PLANA

Dado un fluido que se mueve en forma potencial (no hay esfuerzos de deformación) y que se encuentra con el borde de ataque de una lamina plana sumergida, se observa que la capa límite es delgada y el fluido se mueve con baja velocidad, es decir, en forma laminar.

Pero a lo largo de la lámina la capa aumenta de espesor y existirá una distancia del borde en la que se observa que alcanza el flujo turbulento. La aparición de esta lleva aparejado un incremento del espesor de la capa límite.

Como se calculó anteriormente, para el flujo laminar: $\delta \propto \sqrt{x}$ asimismo se puede determinar que cuando aparece la turbulencia: $\delta \propto x^{3/2}$ y que para un desarrollo completo de la misma: $\delta \propto x^{4/5}$

La zona laminar en el borde de ataque llega hasta valores de 2,5 mm. (aire y agua), pero cuando aparece la turbulencia, el espesor de la subcapa viscosa disminuye unas 10 veces (0,25 mm).



Desarrollo de capa límite sobre una lámina plana

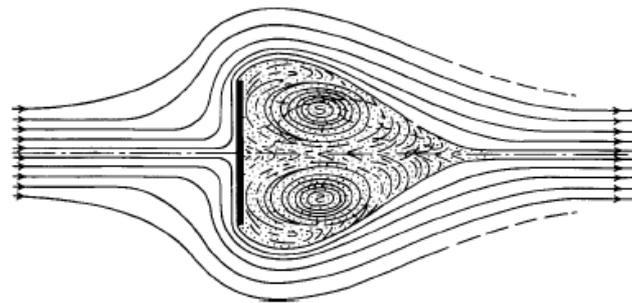
Asimismo, se determina que en el flujo paralelo aparece la turbulencia para valores altos del Número de Reynolds (el valor típico depende de la rugosidad de la pared) iguales a 10^5 a 10^6 (valor crítico para láminas pulidas).

Al abandonar la lámina, el fluido no está más sujeto a los esfuerzos originados en la superficie, por lo que los gradientes se anulan y la capa límite se entremezcla y desaparece, retornando el flujo a una velocidad uniforme.

En ciertos casos, por ejemplo el de laminas transversales, el fluido cambia su dirección en ángulo grande y se mueve sobre la cara frontal, pero al llegar al borde su cantidad de movimiento le impide adaptarse a este y se separa de la lamina, creándose en la zona trasera una zona de fluido que se mueve con torbellinos muy grandes (vórtices) conocida como estela, que consume grandes cantidades de energía y origina gran caída de presión.

Siempre que existe un gran cambio de magnitud o dirección de velocidad del fluido que le impide adaptarse al sólido se produce separación de la capa límite, estos casos se presentan en contracciones o expansiones súbitas, una obstrucción o curvas muy cerradas, aún en casos de ensanchamiento suave (cuando el ángulo de expansión es mayor que 7°), ya que existe algún punto en el cuál se origina un flujo de retroceso y formación de vórtices.

En general entonces es conveniente evitar los cambios bruscos de sección transversal o tratando de conseguir formas aerodinámicas a los objetos.

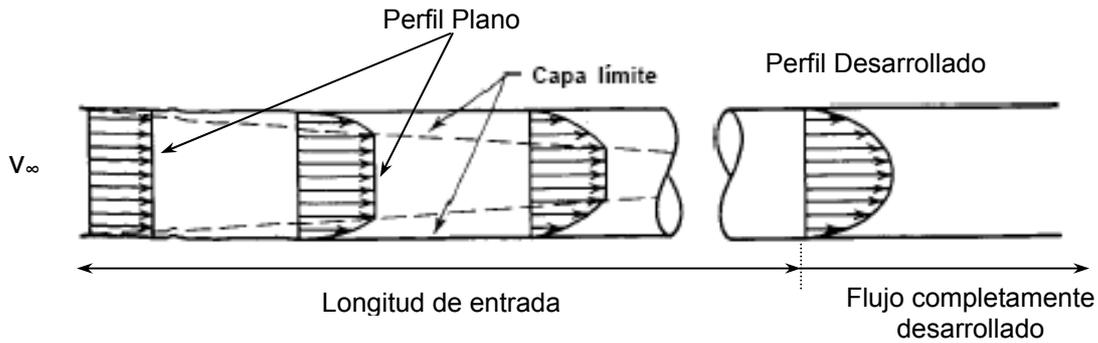


▪ **LONGITUD DE ENTRADA EN CONDUCTOS**

El flujo que ingresa a un conducto no es uniforme a lo largo de una cierta distancia llamada "longitud de entrada". En el ingreso no hay esfuerzos tangenciales en el fluido entrante, sino que se forman capas límites con un núcleo central no afectado por fuerzas de cizallas pero que se reduce con la distancia al crecer las capas envolventes.

El gradiente de presión varía a lo largo de la distancia y para conductos largos respecto al ancho o profundidad, se alcanza un estado uniforme sin cambios del perfil de velocidades.

Si el gradiente de presión es constante, la velocidad del núcleo debe crecer en la dirección del flujo para mantener las condiciones de continuidad, y se obtendrá un valor máximo al anularse el núcleo, y se conoce como flujo completamente desarrollado.



Para capa límite laminar, Boussinesq obtiene:

$$Le = 0,065 D N_{Re}$$

donde $N_{Re} = \frac{\bar{v} D \rho}{\mu}$ y D es el diámetro del tubo. Así, si $N_{Re}=2000$; $Le = 130 D$.

Si la capa límite es turbulenta, Le se hace menor, así una ecuación típica sería:

$$Le = 0,623 (N_{Re})^{0,25} \cdot D$$

Así para si $N_{Re}=10000$ se obtiene $Le = 6,23 D$.

Cualitativamente la caída de presión es mayor a través de la longitud de entrada que luego de establecer el flujo completamente desarrollado, y esto se debe a que; primeramente τ es mayor en las cercanías del borde de ataque, y además el fluido en la capa límite se mueve más lentamente que en la corriente libre. Por lo tanto, para una capa límite que crece en un conducto cuyo gasto es constante debe haber aceleración del fluido en la corriente libre.

Ambos efectos, acelerar el fluido y elevado esfuerzo tangencial en el borde de ataque significa mayor pérdida de presión en la longitud de entrada, y en general, para un N_{Re} (basado en D) dado el ΔP en la longitud de entrada es el doble o triple del flujo desarrollado en el conducto.

3.B. TURBULENCIA

▪ CARACTERISTICAS DEL FLUJO TURBULENTO

Según se concibe actualmente, el flujo de un fluido en régimen turbulento está distribuido en torbellinos, que son de tamaños u órdenes distintos, donde un torbellino de mayor tamaño está constituido por otros de menor orden hasta llegar a tamaños microscópicos.

Los diferentes torbellinos no mantienen por mucho tiempo su identidad (su duración es mas o menos efímera según su tamaño) ya que pierden la misma cuando recorren una distancia del orden de su diámetro, dando lugar a la formación de nuevos torbellinos con distintos tamaños, constituidos por diferentes partículas que se mueven con velocidades y direcciones diferentes.

Se infiere que en el seno de un flujo turbulento hay un espectro de turbulencia debido a los diversos tamaños de los torbellinos coexistentes en un momento dado.

En un tiempo y volumen determinado existe una amplia gama de tamaños de torbellinos. El tamaño del torbellino máximo es del mismo orden que la dimensión mínima de la corriente turbulenta, el de los torbellinos más pequeños es de alrededor de 1 milímetro, mientras que tamaños menores desaparecen rápidamente por acción de las fuerzas viscosas. Teniendo en cuenta que los torbellinos menores contienen alrededor de 10^{16} moléculas, la turbulencia no es un fenómeno molecular sino que es microscópico, es decir, no puede tratarse por observación de las moléculas individuales.

La figura muestra la estructura de un torbellino y los elementos de distinto orden que lo forman.



Un torbellino cualquiera contiene una cantidad definida de energía mecánica, que en los de mayor tamaño proviene de la energía del flujo global del fluido. El movimiento de traslación y rotación implica una transferencia de energía desde los de mayor a los de menor tamaño. Finalmente, esta energía mecánica se transforma irreversiblemente en calor cuando los torbellinos de menor tamaño se destruyen por la acción de la viscosidad.

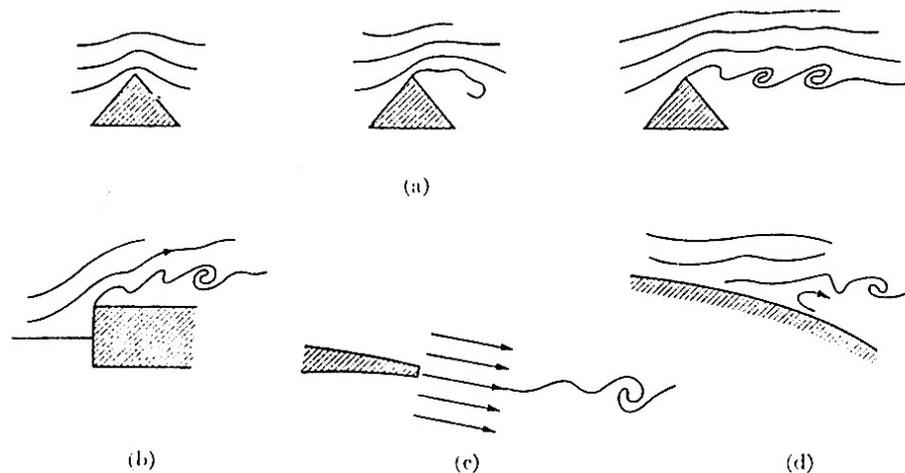
La turbulencia puede originarse por dos mecanismos principales, ya sea por contacto de la corriente de fluido con límites o superficies sólidas o bien por interacción entre dos capas o regiones de fluido que se mueven a velocidades muy diferentes.

El primer tipo se conoce como turbulencia de pared, que aparece cuando el fluido se mueve en conductos cerrados, confinado entre paredes o circulando alrededor de objetos sólidos sumergidos en la corriente.

La segunda se denomina turbulencia libre, que se presenta por el flujo de un chorro a alta velocidad en un fluido estancado o que se mueva a baja velocidad, o también, cuando una capa límite se separa de una pared sólida y se mueve a través de la masa global del fluido.

Queda entonces establecido que la turbulencia es el resultado de una falla en un flujo inicialmente uniforme, cuyos remolinos pueden propagarse hasta invadir el resto del fluido que circula.

Las figuras ilustran esquemáticamente posibles orígenes de turbulencia.



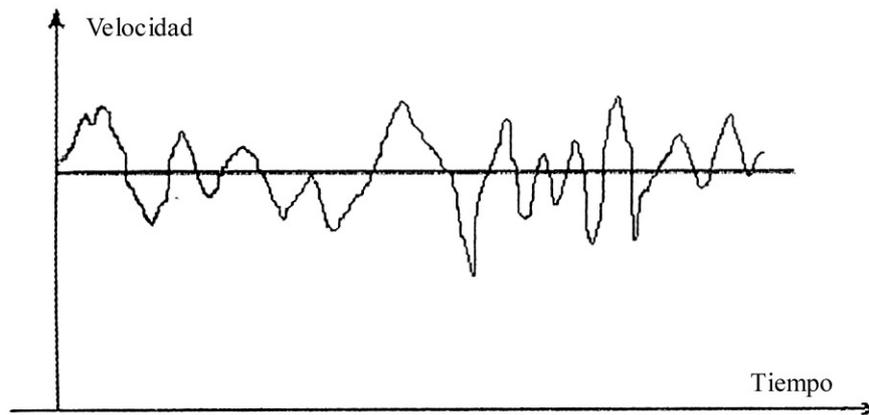
. Formación de remolino en superficies con discontinuidad en la velocidad: (a) obstáculo anguloso; (b) cuerpo grueso; (c) borde de zaga; (d) separación de la capa límite.

▪ FLUCTUACIONES Y MAGNITUDES ALISADAS TEMPORALMENTE

Teniendo en cuenta que la descripción del movimiento turbulento es difícil por su naturaleza aleatoria, resulta oportuno intentar una descripción mediante un estudio estadístico del comportamiento de un flujo.

De tal forma, si representamos la variación de un componente de la velocidad instantánea en un punto dado del campo de flujo turbulento en función del tiempo para ese punto y también que en distintos puntos del mismo campo, los modelos de velocidad en un instante dado son distintos.

Por lo tanto, habrá que definir una velocidad para un momento y posición determinada, que llamaremos velocidad instantánea, que representará el valor que adquiere en el punto en ese momento determinado y que cambiará inmediatamente para un instante posterior.



Si se toma un lapso de tiempo lo suficientemente largo, tal que pueda ser tratado estadísticamente pero que por otra parte no sea afectado por perturbaciones externas a las condiciones de flujo (modificaciones rápidas del caudal, por ejemplo) los valores de la velocidad instantánea se pueden promediar para ese lapso.

Observando la gráfica podemos notar que en cada momento, la velocidad instantánea puede considerarse la suma algebraica de dos velocidades, (i) una es el promedio de velocidad en el lapso de tiempo considerado y que se denomina velocidad alisada temporalmente o de tiempo ajustado y (ii) otra es la diferencia entre la velocidad instantánea y la alisada, que puede estar por debajo o por encima de esta última y que se conoce como velocidad fluctuante o de fluctuación turbulenta, originada por el efecto de la turbulencia y la existencia de torbellinos.

La representación corresponde a una componente de la velocidad, pero el resultado es similar para las otras direcciones. Por lo tanto se puede escribir;

$$v_x = \bar{v}_x + v_x' \qquad v_y = \bar{v}_y + v_y'$$

$$v_z = \bar{v}_z + v_z' \qquad p = \bar{p} + p'$$

Igual consideraciones se pueden formular para la presión local, obteniendo una representación similar, donde la presión instantánea es la suma de una presión alisada (tal como la indicaría un instrumento ordinario) y una presión fluctuante originada en la turbulencia.

En general, se puede representar;

$$\bar{v}_i = \frac{1}{\theta} \int_{\theta_0}^{\theta_0+\theta} v_i d\theta \qquad \bar{p} = \frac{1}{\theta} \int_{\theta_0}^{\theta_0+\theta} p d\theta$$

para $i = x, y, z$

Debe destacarse que si pretende alisar las magnitudes fluctuantes (velocidad o presión), el resultado es cero, ya que oscilan alrededor de un valor medio (la velocidad o la presión ajustada) y su promedio en el tiempo será nulo, o en otras palabras, su suma algebraica es cero.

$$\overline{v'_i} = \frac{1}{\theta} \int_{\theta_0}^{\theta_0+\theta} v'_i d\theta = 0 \qquad \overline{p'} = \frac{1}{\theta} \int_{\theta_0}^{\theta_0+\theta} p' d\theta = 0$$

Por otra parte, cabe mencionar que el valor medio cuadrático de las velocidades o presiones instantáneas no es nulo.

$$\overline{v_i'^2} = \frac{1}{\theta} \int_{\theta_0}^{\theta_0+\theta} v_i'^2 d\theta \neq 0 \qquad \overline{p_i'^2} = \frac{1}{\theta} \int_{\theta_0}^{\theta_0+\theta} p_i'^2 d\theta \neq 0$$

Las velocidades y presiones instantáneas se anularán solamente cuando no exista turbulencia, es decir, en flujo laminar, ya que al no existir torbellinos el comportamiento se vuelve ordenado o no fluctuante, y el flujo circula como capas adyacentes que deslizan unas sobre otras.

Una forma de medir la intensidad de la turbulencia consiste en utilizar la raíz de la velocidad cuadrática media y relacionarla con algún valor característico, tal como la velocidad alisada media de flujo, quedando:

$$\frac{\sqrt{\overline{(v_i')^2}}}{\langle v_i \rangle} = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{\theta} \int_{\theta_0}^{\theta_0+\theta} (v_i')^2 d\theta\right)}}{\langle v_i \rangle}$$

También, se puede calcular una energía cinética media de la turbulencia, por unidad de masa, de la forma:

$$\left(\frac{\text{Energia Cinetica}}{\text{Masa}}\right) = \frac{1}{2} (\overline{v_x'^2} + \overline{v_y'^2} + \overline{v_z'^2})$$

▪ **FLUCTUACIONES DE VELOCIDAD**

Para fluidos incompresibles, la ecuación de continuidad se expresaba de la forma:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Que en flujo turbulento:

$$\frac{\partial(\overline{v_x} + v_x')}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{v_y} + v_y')}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{v_z} + v_z')}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \overline{v_x}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v_y}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v_z}}{\partial z} + \frac{\partial v_x'}{\partial x} + \frac{\partial v_y'}{\partial y} + \frac{\partial v_z'}{\partial z} = 0$$

Si se miden simultáneamente los valores de una velocidad de desviación (por ejemplo, v_x') en dos puntos separados se observará que a medida que aumenta la separación, la correspondencia varía desde un valor muy estrecho (pequeña distancia) hasta la independencia total (grandes distancias).

Esto indica que en distancias pequeñas se están midiendo las velocidades de fluctuación en un mismo torbellino y que cuando la distancia es grande, se miden en distintos torbellinos. Por lo tanto, al medir las tres componentes en el mismo punto, se notará que un cambio en cualquiera de ellas lleva aparejado un cambio en las otras dos. Tomando un promedio de tiempo lo suficientemente grande comparado con la velocidad de fluctuación, queda:

$$\frac{\partial \overline{v_x'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v_y'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v_z'}}{\partial z} = 0$$

Por lo que, entonces se obtiene:

$$\boxed{\frac{\partial \overline{v_x}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v_y}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v_z}}{\partial z} = 0}$$

Ecuación de continuidad en tiempo ajustado o alisada temporalmente.

De igual forma, las ecuaciones de NAVIER-STOKES para fluidos incompresibles, se pueden escribir (para la dirección de x):

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial \theta} = -\left(\frac{\partial \rho v_x v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y v_x}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z v_x}{\partial z}\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x$$

En función de las velocidades instantáneas. Luego, expresándolas por la suma de la velocidad de fluctuación y la velocidad media, quedarán:

$$\frac{\partial \rho(\bar{v}_x + v_x')}{\partial \theta} = - \left[\frac{\partial \rho}{\partial x} (\bar{v}_x + v_x')(\bar{v}_x + v_x') + \frac{\partial \rho}{\partial y} (\bar{v}_y + v_y')(\bar{v}_x + v_x') + \frac{\partial \rho}{\partial z} (\bar{v}_z + v_z')(\bar{v}_x + v_x') \right] +$$

$$+ \mu \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\bar{v}_x + v_x') + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\bar{v}_x + v_x') + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\bar{v}_x + v_x') \right] - \frac{\partial \rho}{\partial z} (\bar{P} + P') + \rho g_x$$

En la expresión anterior, podemos tener en cuenta el promedio del tiempo, de tal forma que en ese lapso de tiempo promedio los términos de la forma:

$$\frac{\partial \rho \bar{v}_x v_x'}{\partial x}; \frac{\partial \rho \bar{v}_x v_y'}{\partial y}; etc. = 0$$

son nulos. Recordemos que para un lapso de tiempo promedio las fluctuaciones de velocidad son nulas si las medimos dentro del mismo torbellino. Además, los términos de la forma:

$$\frac{\partial \rho v_x' v_x'}{\partial x}; \frac{\partial \rho v_y' v_x'}{\partial y}; etc. \neq 0$$

son distintos de cero, aunque positivos o negativos (generalmente negativos). Por lo tanto, las ecuaciones quedarán:

$\frac{\partial \rho \bar{v}_x}{\partial \theta} = - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} - \left(\frac{\partial \rho \bar{v}_x v_x'}{\partial z} + \frac{\partial \rho \bar{v}_y v_x'}{\partial y} + \frac{\partial \rho \bar{v}_z v_x'}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial \rho v_x' v_x'}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y' v_x'}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z' v_x'}{\partial z} \right)$ $+ \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_x$	Ecuación del movimiento de tiempo ajustado o aislada temporalmente
--	--

Como se apreciará, esta ecuación del movimiento en tiempo ajustado es semejante a la ecuación del movimiento donde se sustituyen los valores instantáneos (v_x, v_y, v_z, p) por los valores medios ($\bar{v}_x, \bar{v}_y, \bar{v}_z, \bar{p}$), apareciendo nuevos términos de fluctuación promedio ($\rho \overline{v_x' v_x'}, etc.$) que se denominan “Esfuerzos Reynolds”, y son los componentes de la “densidad de flujo turbulento de cantidad de movimiento”, y que se pueden denotar:

$$\overline{\tau_{xx}}^{(t)} = \rho \overline{v_x' v_x'} ; \quad \overline{\tau_{xy}}^{(t)} = \rho \overline{v_x' v_y'} ; \quad \overline{\tau_{xz}}^{(t)} = \rho \overline{v_x' v_z'}$$

Luego, para las tres direcciones espaciales se puede escribir:

$$\boxed{(\nabla \cdot \bar{v}) = 0} \quad \text{Ecuación de continuidad alisada temporalmente o de tiempo ajustado}$$

$$\boxed{\rho \frac{D\bar{v}}{Dt} = -\bar{\nabla p} - [\bar{\nabla \tau_{(l)}}] - [\bar{\nabla \tau_{(t)}}] + \rho g} \quad \text{Ecuación del movimiento alisada temporalmente o de tiempo ajustado.}$$

Es decir, las ecuaciones generales deducidas en flujo laminar se pueden aplicar sustituyendo los valores medios por los instantáneos, y el tensor esfuerzo, por la suma de dos términos; uno laminar (viscoso) y otro turbulento.

▪ **COEFICIENTES DE CORRELACIÓN**

Observamos que v'_x, v'_y, v'_z son fluctuaciones de velocidad en un punto según cada dirección, y los productos $\overline{v'_x v'_y}, \overline{v'_x v'_z}$, etc. son medidas de las correlaciones entre fluctuaciones. Se definen entonces los siguientes coeficientes de correlación adimensionales:

$$R_{v'_i v'_j} = \frac{\overline{v'_i v'_j}}{\sqrt{(\overline{v'^2_i})^2 (\overline{v'^2_j})^2}} \quad \text{Coeficiente de correlación en un punto}$$

donde v'_i, v'_j están medidas en el mismo punto e instante, para i, j tomando valores, x, y, z; también se ha tratado de definir correlaciones entre dos puntos según la siguiente expresión:

$$R_{1,2} = \frac{\overline{v'_{x1} v'_{x2}}}{\sqrt{(\overline{v'^2_{x1}})^2 (\overline{v'^2_{x2}})^2}} \quad \text{Escala de turbulencia. Coeficiente de correlación en dos puntos}$$

Para los casos en que $\overline{v'^2_x} = \overline{v'^2_y} = \overline{v'^2_z}$ nos encontramos ante lo que se denomina turbulencia isotrópica, y tendrá lugar cuando no existe gradiente de velocidad, por ejemplo en flujo unidimensional, cuando $dv/dy = 0$ la turbulencia es isotrópica. Este caso se presenta en el eje de un tubo y en los bordes fronterizos de la capa límite.

Para los demás casos, donde $\overline{(v'_x)^2} \neq \overline{(v'_y)^2} \neq \overline{(v'_z)^2}$ la turbulencia es anisotrópica y se presenta en los torbellinos grandes.

▪ **VISCOSIDAD DE REMOLINO**

Para la turbulencia anisotrópica existe una relación entre $\tau_{yx}^{(t)}$ y $\frac{d\overline{v_x}}{dy}$ biunívoca y que por analogía a la ley de Newton se escribe:

$$\overline{\tau_{yx}^{(t)}} = -\mu^{(t)} \frac{d\overline{v_x}}{dy}$$

donde $\mu^{(t)}$ se denomina “viscosidad de remolino”.

La diferencia estriba en que si bien la viscosidad es una propiedad del fluido resultante de la observación macroscópica del promedio de un gran número de moléculas en movimiento; las viscosidades de remolino no lo son, sino que dependen de la condición de flujo. La viscosidad de remolino depende de la localización en el campo turbulento, y a los valores locales de escala e intensidad de turbulencia. La expresión general quedará entonces:

$$\overline{\tau_{yx}^{(t)}} = -\left[\mu^{(t)} + \mu\right] \frac{d\overline{v_x}}{dy}$$

▪ **PERFILES DE VELOCIDAD** (Ley de Potencia)

Se ha demostrado experimentalmente que las relaciones entre velocidad media (de tiempo ajustado o alisada) y la velocidad máxima están dadas por formas de una ley de potencia (aproximadamente), para números de Reynolds entre 10.000 y 100.000:

:

$$\frac{\overline{v_x}}{v_{x \max}} \cong \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{7}}$$

$$\frac{\langle \overline{v_x} \rangle_{med}}{v_{x \max}} \cong \frac{4}{5} \cong 0.8$$

- $\overline{v_x}$: Velocidad de tiempo ajustado en x (alisada)

- $\overline{v_{x \max}}$: Velocidad máxima de tiempo ajustado en x (alisada)
- $\langle \overline{v_x} \rangle_{med}$: Velocidad media de tiempo ajustado en x (promedio en toda la sección transversal).

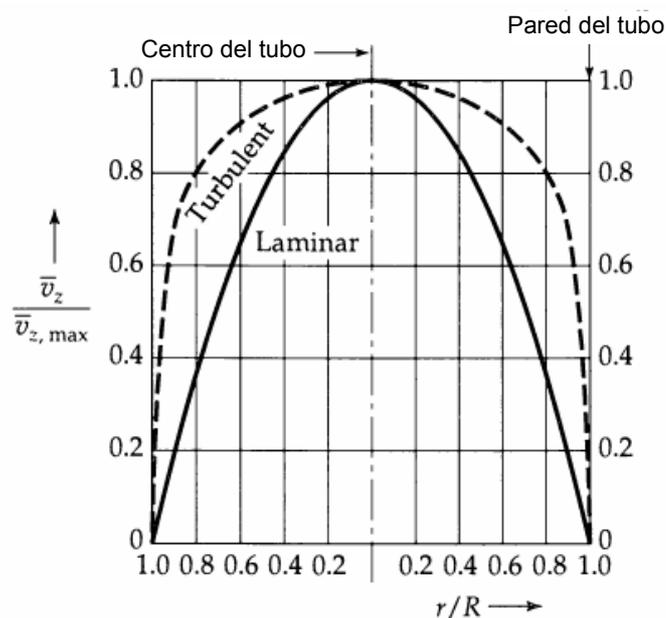
Generalizando, la relación se puede escribir:

$$\frac{\langle \overline{v_x} \rangle_{med}}{\overline{v_{x \max}}} = \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)} \quad y \quad \frac{\overline{v_x}}{\overline{v_{x \max}}} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{n}}$$

donde n es una constante que sufre ajustes empíricos para distintos números de Reynolds según la siguiente tabla:

Número de Reynolds	n	$\frac{\langle \overline{v_x} \rangle_{med}}{\overline{v_{x \max}}}$
4×10^3	6,0	0,791
2×10^4	6,6	0,806
1×10^5	7,0	0,817
1×10^6	8,8	0,853
2×10^6	10,0	0,865
3×10^6	10,0	0,865

Los perfiles de velocidad se pueden graficar entonces mediante la figura siguiente:



▪ CONCLUSIONES

Como se vio, las ecuaciones de cambio permitían expresar el campo de velocidad de un fluido en movimiento, pero esas ecuaciones no tienen solución sino se introducen suposiciones simplificadoras.

Además, en el flujo turbulento aparecen coeficientes de viscosidad turbulenta (viscosidad de remolino) que contribuyen al transporte de cantidad de movimiento, y que depende del régimen de flujo, de su dirección y posición (isotropía y anisotropía).

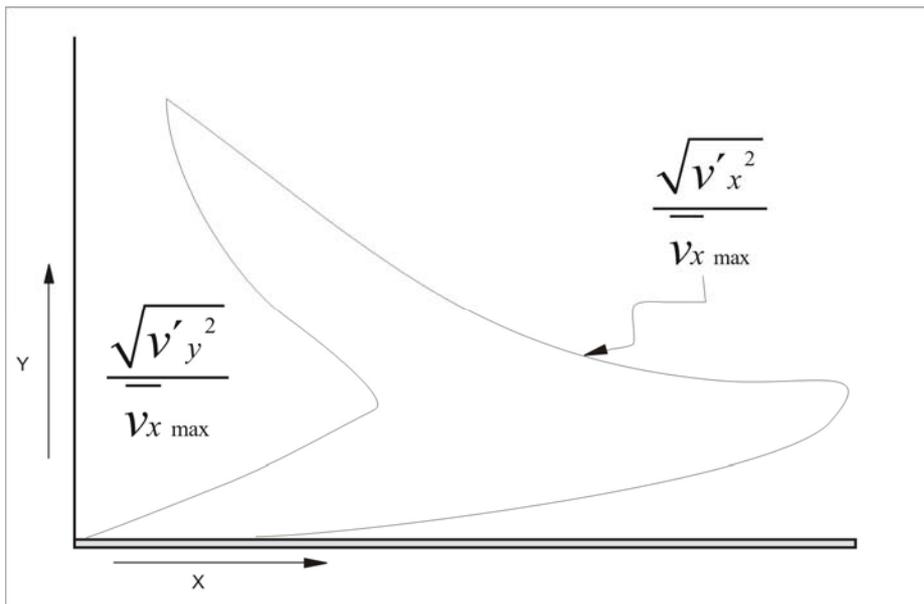
De aquí, la ecuación de cambio tiene más términos que corresponden a la naturaleza turbulenta del flujo.

La forma de relacionar estas ecuaciones es por “alisado temporal” o “ajuste de tiempo” de las ecuaciones, que es el promedio temporal de magnitudes fluctuantes. Este alisado es válido si recordamos que nuestros sentidos y la mayoría de los instrumentos perciben un mundo “alisado” (por ejemplo, la materia no se percibe a nivel molecular).

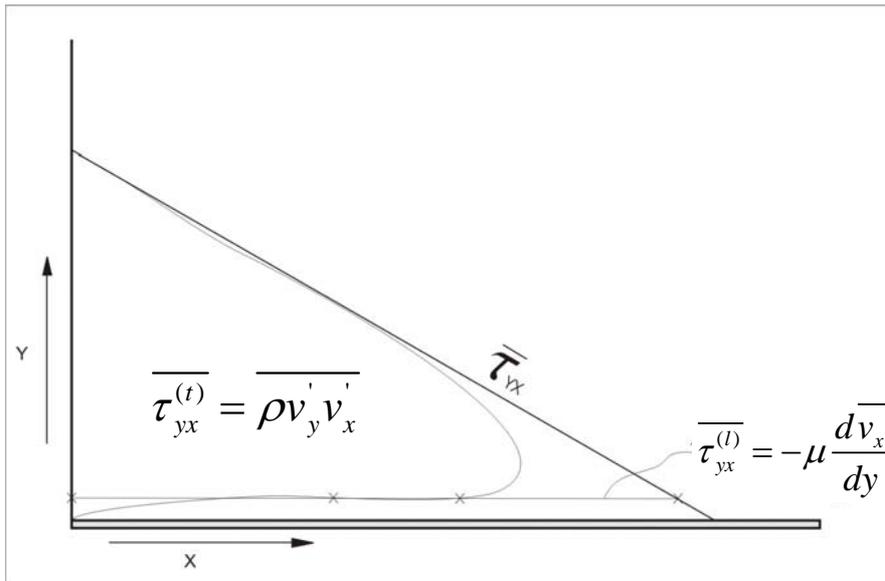
Así, en la ecuación de cambio, tendremos términos de valores medios (alisados), de fluctuantes, y de fluctuantes con medios.

Pero esa ecuación se promedia en el tiempo, y como las magnitudes medias ya son valores promedio, no sufren modificaciones; aquellos que tienen una sola variable fluctuante se anulan ($v_i' = 0$) y los que contienen productos de variables representan el aporte turbulento al transporte de cantidad de movimiento ($v_i' v_j' \neq 0$).

Como la predicción teórica de los coeficientes turbulentos es prácticamente imposible, su conocimiento dependerá de datos experimentales. Así, para flujo turbulento entre dos láminas planas se pueden presentar los siguientes ejemplos:



Comparación entre fluctuaciones en dirección al flujo y perpendiculares al mismo.



Esfuerzos de Reynolds en un canal rectangular:

$$\overline{\tau_{yx}} = \overline{\tau_{yx}^{(l)}} + \overline{\tau_{yx}^{(t)}}$$

es decir, la densidad de flujo de cantidad de movimiento depende casi totalmente de la turbulencia, y sólo cerca de la pared aumenta la importancia del transporte molecular.