UNIVERSIDAD TECNOLOGICA NACIONAL

FACULTAD REGIONAL ROSARIO

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA QUIMICA

FENOMENOS DE TRANSPORTE

NOTAS DE CÁTEDRA: "UNIDAD TEMÁTICA 2"

- **ANALISIS ENVOLVENTE EN ESTADO ESTACIONARIO**
- **EC. DIFERENCIALES PARA FLUJO DE FLUIDOS ISOTERMICOS**
- **ANALISIS DIMENSIONAL**

Revisión: Junio 2008

“La presente es una recopilación de diversas notas y apuntes de cátedra dispersas que fueron elaboradas o redactadas en los últimos años. Se agradece especialmente la colaboración de los alumnos cursantes en 2008: Ferullo, Luciana; Giménez, Dianela; Parisi, Florencia; Ramunno, María Florencia; Risso, Eliana para su compilación y organización, que con la coordinación del Auxiliar Juan Dominguez permite disponer de esta versión revisada. Se advierte que estas notas son solo una guía para el estudio, debiendo consultarse la bibliografía recomendada en cada tema para lograr un conocimiento pleno de los mismos.”

Cátedra de Fenómenos de Transporte
Ing. Jorge E. Robin
Ing. Marcela N. Kaminsky
Juan M. Dominguez

2.A. ANALISIS ENVOLVENTE EN ESTADO ESTACIONARIO

2.A.1 INTRODUCCION A LA RESOLUCION DE BALANCES

Los balances de cantidad de movimiento, energía y masa pueden formularse aplicando las leyes de conservación que rigen el comportamiento de un sistema. Estos balances se pueden enunciar para un determinado período de tiempo (evolución discontinua o cíclica), o más comúnmente introduciendo el concepto de velocidad de evolución, con las cantidades relacionadas con la unidad de tiempo.

Su formulación general es la siguiente;

(Velocidad) ACUMULACION "NETA" en el VOLUMEN del SISTEMA	**=**	**(Velocidad) TRANSPORTE "NETO" de ENTRADA a través de la SUPERFICIE del SISTEMA**	**-**	**(Velocidad) TRANSPORTE "NETO" de SALIDA a través de la SUPERFICIE del SISTEMA**	**+**	**(Velocidad) GENERACION "NETA" en el VOLUMEN del SISTEMA**

El objetivo es obtener una descripción precisa y conveniente usando expresiones matemáticas tan rigurosas como sea posible, con un mínimo de parámetros desconocidos. Estas expresiones obtenidas pueden ser ecuaciones diferenciales ordinarias, en derivadas parciales, diferenciales finitas, algebraicas, etcétera.

FORMULACION

La secuencia habitual para el planteamiento y resolución de un balance es la siguiente;

1.- Desarrollar un modelo geométrico y elegir un sistema de coordenadas.

2.- Identificar las Entradas y Salidas.

3.- Identificar la Generación (si es positivo se crea y si es negativo se consume).

4.- Verificar el Estado de Régimen (las evoluciones en estado estacionario tienen acumulación nula).

5.- Definir las Condiciones Límite o de Frontera (condición de una variable en la superficie de frontera del sistema. Es la constante arbitraria en la solución de una ecuación diferencial. Existen tantas Condiciones Límite como el orden de la ecuación).

6.- Establecer la Condición Inicial o estado de las variables en el momento inicial (evoluciones transitorias o no estacionarias).

7.- Definir los Parámetros y los Requisitos. Condiciones o restricciones a cumplir por el sistema, como por ejemplo, la temperatura, presión, constancia de propiedades, tipo de flujo, etcétera.

EJECUCION

1.- Tomar una envoltura finita lo más sencilla posible acorde con el sistema coordenado elegido.
2.- Plantear el balance.
3.- Obtener la expresión simbólica representativa.
4.- Resolver la ecuación para lograr conocer la distribución de las variables o “perfiles”.
5.- Simplificarlas para lograr relaciones más simples o “soluciones generales”.
6.- Identificar los valores de frontera, los valores promedio y cualquier otro de interés para la situación.

APLICACIONES

Campo de utilización, estudio de limitaciones, ejemplos para diseño.

2.A.2. ANALISIS ENVOLVENTE DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Consiste en la aplicación de la ley de conservación de cantidad de movimiento o 2da. Ley de Newton a un sistema de flujo en estado estacionario, para un fluido de propiedades constantes que circula en régimen isotérmico.

Velocidad de ENTRADA de CANTIDAD de MOVIMIENTO por FLUJO GLOBAL (ó convectivo)	**-**	**Velocidad de SALIDA de CANTIDAD de MOVIMIENTO por FLUJO GLOBAL (ó convectivo**	**+**	**Velocidad de ENTRADA de CANTIDAD de MOVIMIENTO por TRANSP. MOLEC. (ó propagación)**	**-**	**Velocidad de SALIDA de CANTIDAD de MOVIMIENTO por TRANSP. MOLEC. (ó propagación)**	**+**	**Sumatoria de las FUERZAS EXTERNAS (presión y gravitación)**	**= 0**

FORMULACION DEL BALANCE

1.- Desarrollar la forma de la envoltura elemental y seleccionar el sistema de coordenadas adecuado a la misma.
2.- Identificar las Entradas y Salidas. El transporte de cantidad de movimiento a través de la superficie de la envoltura puede originarse por dos mecanismos;

- *Transporte Global o Convectivo*, debido al movimiento conjunto del fluido que permite el ingreso o egreso de cantidad de movimiento al sistema.
- *Transporte Molecular o Propagación*, a causa de la densidad de flujo de cantidad de movimiento, o esfuerzos cortantes, originada por la viscosidad del fluido.

3.- Identificar Generación. La cantidad de movimiento puede ser originada, en el elemento de volumen, por dos tipos de fuerzas;

- *Presión*, que actúa en la superficie de la envoltura.

- *Gravitación*, que lo hace en todo el volumen.

4.- Verificar el Estado de Régimen. Para el estado estacionario no existe acumulación de cantidad de movimiento, es decir, no habrá fuerza resultante actuando sobre el volumen de fluido, o lo que es lo mismo, no existirá aceleración.

5.- Definir las Condiciones Límite o de Frontera. Para los balances envolventes de cantidad de movimiento se pueden identificar tres condiciones de frontera;

- *Interfase sólido-fluido:* la velocidad del fluido es nula con respecto al sólido en la interfase, de acuerdo a la ya mencionada condición de no-deslizamiento.
- *Interfase líquido-gas:* se considera que no hay resistencia en la fase líquida por parte de la fase gaseosa, por lo que el gradiente de velocidad y el esfuerzo cortante en el líquido es nulo.
- *Interfase líquido-líquido:* para líquidos inmiscibles de distinta densidad, hay continuidad en ambos lados de la interfase, siendo la velocidad idéntica y común en la interfase para cada líquido.

6.- Condición Inicial: no existe por ser estado estacionario.

7.- Parámetros y Requisitos: temperatura y propiedades físicas constantes. Trayectoria de las partículas de fluido rectilíneas y paralelas, régimen de flujo laminar.

EJECUCION

1.- Tomar una envoltura finita lo más sencilla posible acorde con el sistema coordenado elegido.

2.- Plantear el balance según enunciado por notación simbólica.

3.- Tender a cero la envoltura y obtener una ecuación diferencial del esfuerzo en función de la posición.

4.- Integrar la ecuación para obtener el perfil de densidad de flujo de cantidad de movimiento (esfuerzo cortante) en función de la posición.

5.- Introducir la ecuación de Newton de la viscosidad y obtener una ecuación diferencial de la velocidad en función de la posición.

6.- Integrar la ecuación para obtener el perfil de velocidad en función de la posición.

7.- Obtener la velocidad media de flujo, la velocidad máxima, el caudal volumétrico, la velocidad de flujo de masa, la diferencia de presiones, el esfuerzo cortante en la pared y la fuerza en la pared ejercida por el fluido.

APLICACIONES

En las condiciones enunciadas es válido para flujo en conductos de sección circular, anular, rectangular, para películas de fluido descendentes en planos o cilindros, canales abiertos, etcétera.

2.B. ECUACIONES DIFERENCIALES PARA FLUJO DE FLUIDOS ISOTERMICOS

INTRODUCCION

El concepto de medio continuo explica el comportamiento de la materia como si se encontrara llenando por completo el espacio que ocupa, no tomando en cuenta el comportamiento individual de las moléculas. Al adoptar este punto de vista, y dentro de las limitaciones para el que es válido, se puede tener una descripción matemática con funciones continuas, para los intervalos considerados de las coordenadas de espacio y tiempo. Las cantidades físicas resultantes son independientes de cualquier sistema particular de coordenadas que las describa, aunque pueden referirse a un sistema apropiado por conveniencia, tales como cartesianas, cilíndricas, etcétera.

TENSORES

Son entidades matemáticas que tienen existencia independiente de cualquier sistema de coordenadas, aun-que pueden ser especificados mediante componentes. Las leyes físicas se expresan entonces por ecuaciones tensoriales, que son válidas en cualquier sistema coordenado, es decir, que son invariantes. Los tensores pueden ser clasificados por su orden, reflejando también el número de componentes que poseen en un espacio n-dimensional.

- ***Tensores de Orden Cero o Escalares;*** se especifican por una componente en el espacio tridimensional, o sea, se caracterizan por su magnitud o valor, ej.; masa, temperatura, volumen, tiempo, densidad.
- ***Tensores de Orden Uno o Vectores;*** tienen tres componentes coordenadas en el espacio físico, se caracterizan por ser magnitudes orientadas (en el espacio de tres dimensiones tienen módulo, dirección y sentido), ej.; velocidad, cantidad de movimiento, fuerza, densidad de flujo de energía.
- ***Tensores de Orden Dos o Diadas;*** son el producto indeterminado de dos vectores, se caracterizan por ser magnitudes de nueve componentes en el espacio tridimensional, ej.; densidad de flujo de cantidad de movimiento, esfuerzos, producto diádico de velocidades.

CAMPO TENSORIAL

Asocia un determinado tensor (función de sus coordenadas espaciales y el tiempo) a un vector posición que varía en una región particular del espacio en un intervalo particular del tiempo. Este campo será continuo (o diferenciable) si las componentes del tensor son funciones continuas (o diferenciables). Si las componentes son funciones de sus coordenadas e independientes del tiempo, se llama estacionario.

- ***Campo Escalar:*** Cuando en cada punto de la región la magnitud es un escalar, por ej.;

la densidad de un fluido. Se puede representar por;

$$\rho = \rho\left(x_i, \theta\right)$$

- ***Campo Vectorial:*** Cuando en cada punto de la región existe un vector, por ej.; la velocidad de las partículas de un fluido. Se representa por;

$$v_i = v_i\left(x, \theta\right)$$

- ***Campo Tensorial de 2do. Orden:*** Cuando en cada punto de la región existe una diada, por ej.; el tensor deformación. Representado por;

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}\left(x, \theta\right)$$

Si observamos una región del espacio llena de un fluido, que se encuentra en movimiento respecto de una terna derecha de ejes cartesianos estacionarios, podemos decir que estamos en presencia de un "campo es-calar" cuando nos referimos a la densidad del mismo y a un "campo vectorial" cuando nos referimos a las velocidades de las partículas del mismo.

OPERADORES DIFERENCIALES

Algunos de los más importantes son los siguientes;

- Diferencial respecto a una coordenada: $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$
- Gradiente de un escalar: $grad\phi \cong \nabla\phi$
- Divergencia de un vector: $div.v = \nabla v$
- Rotacional de un vector: $rot.v \equiv \nabla.v$
- Laplaciana de un escalar: $\nabla.\nabla\phi \equiv \nabla^2\phi$

DERIVADAS DE FUNCIONES

Podemos definir las siguientes;

- **Derivada PARCIAL o LOCAL:** Es la variación de una condición o propiedad con el tiempo para un punto fijo en el espacio. En un punto fijo (P), podemos analizar la variación de la velocidad de las partículas de fluido que circulan por aquel con el transcurso del tiempo, esto da lugar a la "Derivada parcial de la velocidad del fluido" en el punto (P), es decir, en símbolos;

$$\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)_P$$

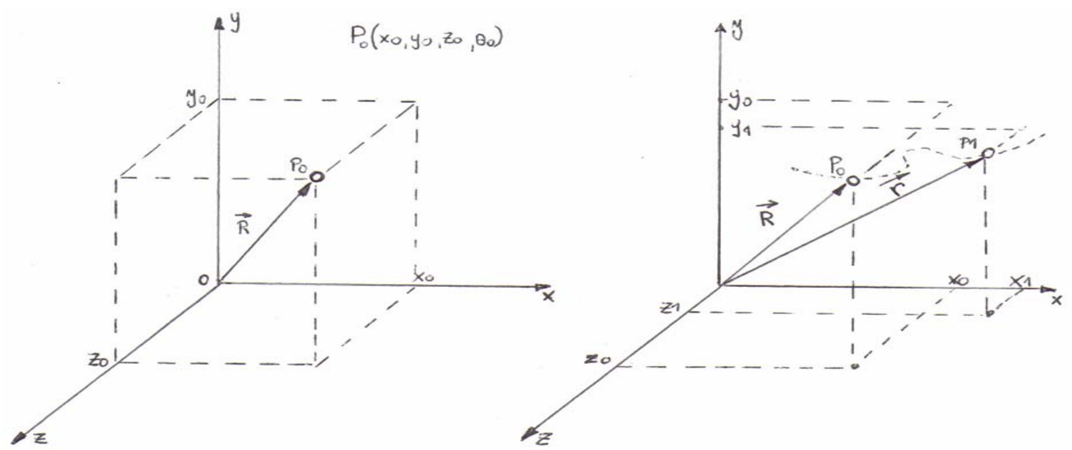
- **Derivada TOTAL:** Variación de una condición o propiedad con el tiempo en las inmediaciones de un punto del espacio tomado como referencia. Para expresar el cambio de la velocidad en los alrededores con respecto al tiempo, obtenemos la "Derivada Total de la velocidad del fluido" para un desplazamiento infinitesimal, o sea;

$$\frac{dv}{d\theta} = \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{d\theta} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{d\theta} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{dz}{d\theta}$$

- **Derivada MATERIAL, SUSTANCIAL ó SIGUIENDO EL MOVIMIENTO:** Variación de una condición o propiedad con el tiempo a lo largo de la trayectoria o movimiento, a partir de un punto del espacio tomado como referencia. Para conocer el cambio de velocidad de una partícula de fluido a lo largo del movimiento, escribimos la "Derivada Sustancial de la velocidad del fluido" respecto del tiempo, que representa la aceleración o rapidez de la variación de velocidad de la partícula en su trayectoria.

$$\frac{Dv}{D\theta} = \frac{\partial v}{\partial \theta} + v_x \frac{\partial v}{\partial x} + v_y \frac{\partial v}{\partial y} + v_z \frac{\partial v}{\partial z}$$

Las siguientes figuras representan cada una de las respectivas derivadas enunciadas.



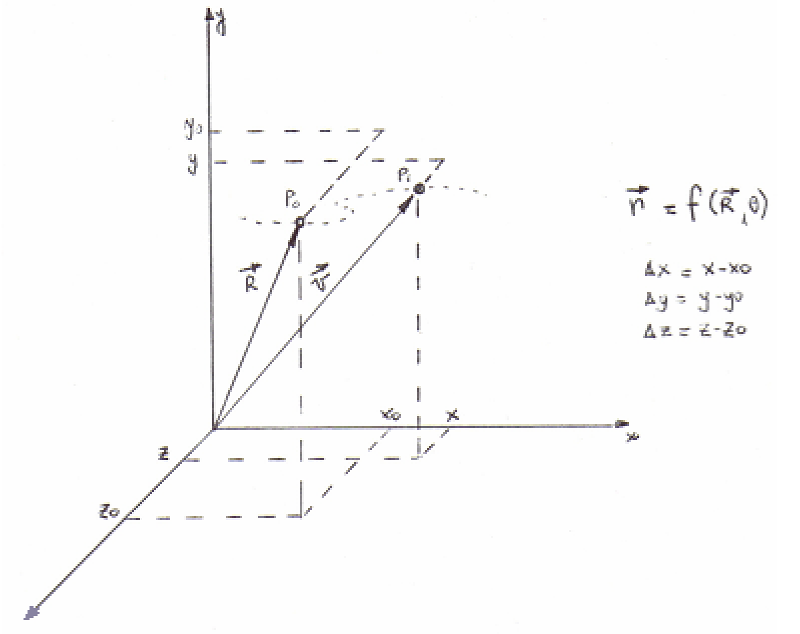
Punto fijo Po

Propiedad varia según tiempo; “derivada parcial”= $\left(\frac{\partial P}{\partial \theta}\right)_{x_o, y_o, z_o}$

Punto desplazado Po➔P1

Propiedad varía según posición y velocidad de desplazamiento;

DERIVADA TOTAL: $dP = \left(\frac{\partial P}{\partial \theta}\right) d\theta + \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz$



Punto desplazándose Po➔P1

Velocidad desplazamiento punto y vector posición iguales;

DERIVADA SUSTANCIAL: $$\frac{DP}{D\theta}=\frac{\partial P}{\partial \theta}+\frac{\partial P}{\partial x}\frac{dx}{d\theta}+\frac{\partial P}{\partial y}\frac{dy}{d\theta}+\frac{\partial P}{\partial y}\frac{dy}{d\theta}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{dz}{d\theta}$$

Siendo, $v_x=\dfrac{dx}{d\theta}$; $v_y=\dfrac{dy}{d\theta}$; $v_z=\dfrac{dz}{d\theta}$

$$\frac{DP}{D\theta}=\frac{\partial P}{\partial \theta}+v_x\frac{\partial P}{\partial x}+v_y\frac{\partial P}{\partial y}+v_z\frac{\partial P}{\partial z}$$

Las expresiones generales anteriores pueden representarse para cada una de sus componentes en el espacio. Por ejemplo, las componentes cartesianas del vector aceleración serán;

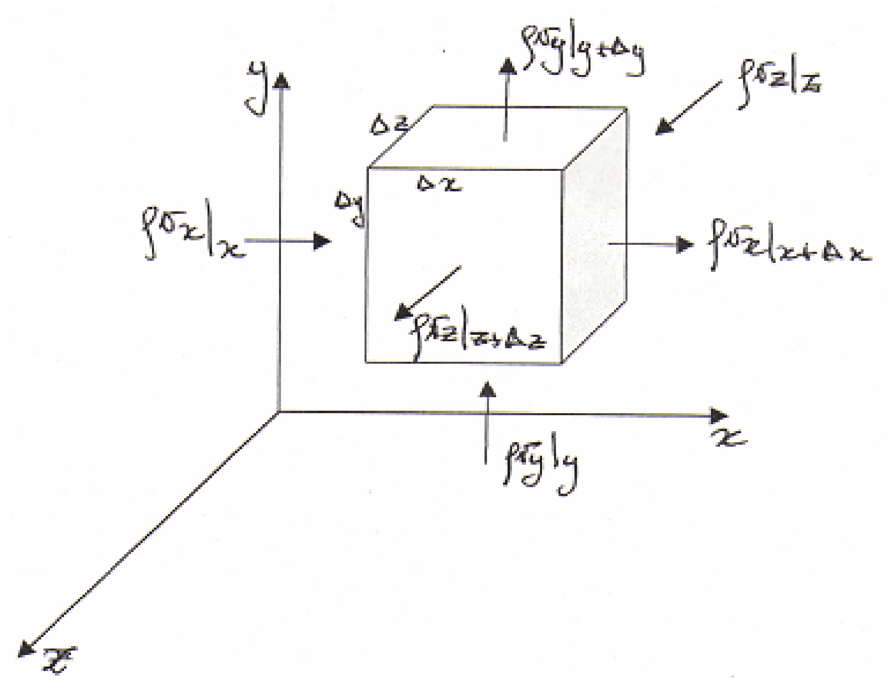
- Componente en "x": $$a_x=\frac{Dv_x}{D\theta}=\frac{\partial v_x}{\partial \theta}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}$$
- Componente en "y": $$a_y=\frac{Dv_y}{D\theta}=\frac{\partial v_y}{\partial \theta}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}$$
- Componente en "z": $$a_z=\frac{Dv_z}{D\theta}=\frac{\partial v_z}{\partial \theta}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}$$
- Forma General: $$a=\frac{Dv}{D\theta}=\frac{\partial v}{\partial \theta}+v_x\frac{\partial v}{\partial x}+v_y\frac{\partial v}{\partial y}+v_z\frac{\partial v}{\partial z}$$

LA ECUACION DE CONTINUIDAD

Consideramos un elemento estacionario de volumen, un cubo de lados Δx, Δy, Δz, a través del cual circula un fluido cuya densidad y velocidad son funciones de la posición y el tiempo.

Si aplicamos un balance de materia al mismo, se podrá calcular el flujo de masa por unidad de tiempo que atraviesa cada cara de ese elemento de volumen, de acuerdo a la siguiente expresión;

Velocidad de Acumulación de Materia	=	Velocidad de Entrada de Materia	-	Velocidad de Salida de Materia



La velocidad de acumulación de materia será la rapidez de variación, respecto del tiempo, de la masa en el interior del cubo, o sea;

$$\frac{\Delta\rho}{\Delta\theta}\left(\Delta x\Delta y\Delta z\right)$$

Para cada par de caras paralelas, la velocidad de entrada y salida de materia podrá expresarse;

- caras perpendiculares al eje x: $\left(\rho v_x\big|_x - \rho v_x\big|_{x+\Delta x}\right)\Delta z\Delta y$
- caras perpendiculares al eje y: $\left(\rho v_y\big|_y - \rho v_y\big|_{y+\Delta y}\right)\Delta x\Delta z$

- caras perpendiculares al eje z: $\left(\rho v_z\big|_z - \rho v_z\big|_{z+\Delta z}\right)\Delta x \Delta y$

El balance de materia quedará entonces;

$$\frac{\Delta\rho}{\Delta\theta}(\Delta x \Delta y \Delta z) = \left(\rho v_x\big|_x - \rho v_x\big|_{x+\Delta x}\right)\Delta z \Delta y + \left(\rho v_y\big|_y - \rho v_y\big|_{y+\Delta y}\right)\Delta x \Delta z + \left(\rho v_z\big|_z - \rho v_z\big|_{z+\Delta z}\right)\Delta x \Delta y$$

Dividiendo la expresión por el elemento de volumen (Δx Δy Δz), y aplicando el límite cuando el volumen y el tiempo tienden a cero, se obtiene;

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial\theta} = -\left(\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z}\right)}$$

Esta expresión es la Ecuación de Continuidad, que describe la variación de la densidad para un elemento de volumen fijo en el espacio, como resultado de las variaciones del vector velocidad másica.

Utilizando notación vectorial-tensorial, también puede escribirse;

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial\theta} + (\nabla.\rho v) = 0}$$

El vector velocidad másica corresponde a una densidad de flujo de materia, y también significa la velocidad de concentración de cantidad de movimiento. El término $(\nabla.\rho v)$ se conoce como divergencia de (ρv), y significa la velocidad neta con que disminuye la densidad de flujo de materia por unidad de volumen. La ecuación establece que la velocidad de aumento de densidad en el interior del elemento de volumen fijo en el espacio, es iguala la velocidad “neta” de entrada de densidad de flujo de materia dividido por el volumen.

Efectuando la diferenciación de los términos y reuniendo las derivadas de la densidad en el primer miembro, se obtiene;

$$\frac{\partial\rho}{\partial\theta} + \left(v_x\frac{\partial\rho}{\partial x} + v_y\frac{\partial\rho}{\partial y} + v_z\frac{\partial\rho}{\partial z}\right) = -\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$$

Se observará que el primer miembro es la derivada substancial de la densidad, o sea, la derivada con respecto al tiempo para una trayectoria de una partícula de fluido. Por lo tanto, la expresión quedará;

$$\boxed{\frac{D\rho}{D\theta} + \rho\left(\nabla . v\right) = 0}$$

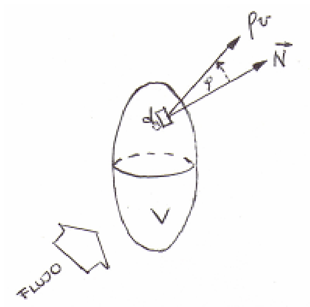
La anterior representa la variación de la densidad de una partícula de fluido tal como la observa quien se mueve con el fluido.

Estas ecuaciones son el resultado de la formulación de la conservación de la materia, y puede efectuarse para un elemento de volumen de una forma arbitraria cualquiera.

Para ilustrarlo, vamos a aplicar el balance de masa a un elemento de volumen (V), que se encuentra limitado por una superficie (S), como el de la figura siguiente.

La formulación del balance de materia es idéntica a la anterior, pero ahora la masa acumulada en la unidad de tiempo será la integral extendida a todo el volumen;

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int_v \rho dv$$



Mientras que la masa que atraviesa la superficie elemental puede expresarse por;

$$\rho\, v . \overrightarrow{N}\, ds \;=\; \rho\, v \cos\varphi\, ds$$

Donde φ es el ángulo formado entre la velocidad másica y el versor unitario dirigido "hacia fuera" en cada punto de la superficie.

La cantidad "neta" de materia que atraviesa toda la superficie del sistema viene dada por el "flujo neto", que se representa por;

$$\int_s \left(\rho v . \overrightarrow{N}\right) ds$$

En consecuencia, el balance de materia indica que la suma de las expresiones para la acumulación en el volumen y el flujo neto deben ser idénticamente nulas (iguales pero de distinto signo), o sea;

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int_v \rho\, dv + \int_s \left(\rho\, v . \overrightarrow{N}\right) ds = 0$$

El teorema de la divergencia (o de Gauss), se puede escribir;

$$\int_s \left(\overrightarrow{A} . \overrightarrow{N}\right) ds = \int_v \left(\nabla . \overrightarrow{A}\right) dv$$

Por lo tanto, aplicándolo a la situación planteada, se obtiene;

$$\int_s \left(\rho\, v . \overrightarrow{N} \right) ds = \int_v \left(\nabla . \rho\, v \right) dv$$

que indica que el flujo neto de materia a través de la superficie del elemento de volumen considerado tiene que ser igual a la velocidad con que se acumula en ese volumen, quedando;

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int_v \rho\, dv + \int_v \left(\nabla . \rho\, v \right) dv = 0$$

y para un volumen que no varía en el tiempo, se debe cumplir;

$$\int_v \frac{\partial \rho}{\partial \theta} dv + \int_v \left(\nabla . \rho v \right) dv = 0$$

o lo que es lo mismo;

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial \theta} + \left(\nabla . \rho v \right) = 0}$$

Formas especiales importantes de la ecuación de continuidad son las siguientes:

- Para *estado estacionario*, la densidad no varía en el tiempo en el punto fijo del espacio, y la expresión quedará;

$$\left(\nabla . \rho v \right) = 0$$

- Para *fluidos incompresibles* (densidad constante) se debe cumplir que;

$$\left(\nabla . v \right) = 0$$

Aunque ningún fluido es totalmente incompresible, en general se admite que los líquidos tienen densidad constante, sin introducir casi error. Aún para los gases, dentro de moderados cambios de presión pueden suponerse con densidad constante.

Para que la última sea válida, sólo es necesario que la densidad sea constante para el elemento de fluido que se mueve a lo largo de una “línea de corriente”, entendiendo por tal a la curva imaginaria que conecta sucesivos puntos del espacio cuyos vectores velocidad son tangentes a la misma, indicando la dirección del movimiento y la trayectoria del elemento.

LA ECUACION DEL MOVIMIENTO

Para un fluido viscoso, en flujo isotérmico, se puede aplicar el principio de conservación de la cantidad de movimiento al mismo elemento de volumen utilizado anteriormente.

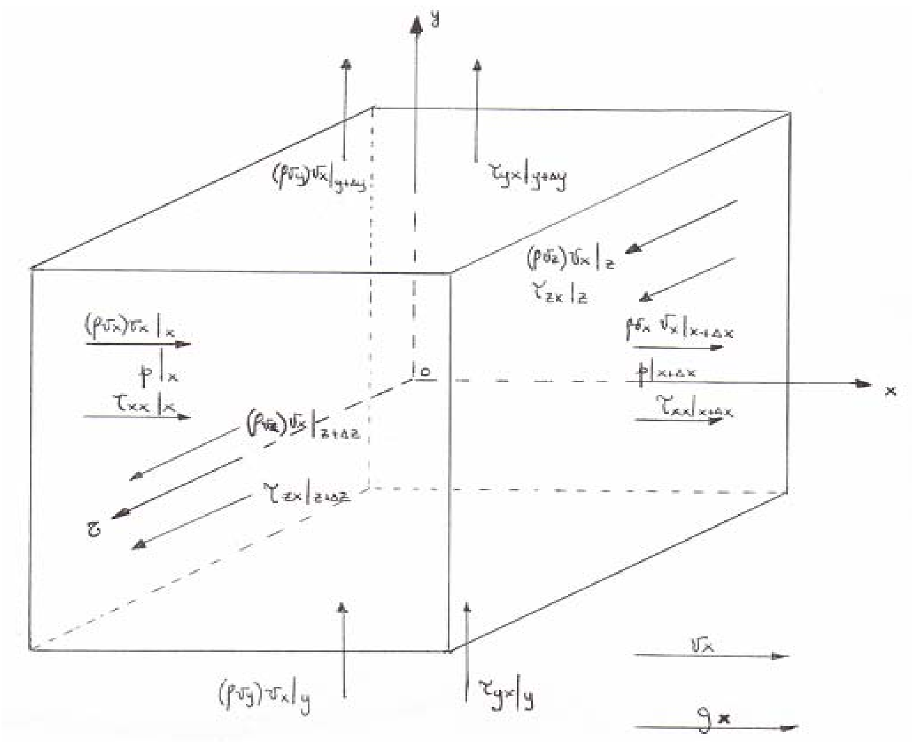
El balance de cantidad de movimiento, aplicado al elemento de lados Δx, Δy, Δz se puede escribir;

Velocidad de acumulación de cantidad de movimiento	=	Velocidad de entrada de cantidad de movimiento	–	Velocidad de salida de cantidad de movimiento	+	Suma de fuerzas que actúan sobre el sistema

Este balance tiene en cuenta que;

- La expresión representa la ecuación de un vector, con componentes para cada una de las direcciones coordenadas (x, y, z).
- El fluido es puro e isotérmico.
- El comportamiento puede ser no-estacionario.
- El movimiento del fluido es arbitrario a través de la superficie del elemento de volumen.
- La velocidad de entrada y salida de cantidad de movimiento se puede efectuar por dos mecanismos; (a) Flujo global o convectivo, o sea, la contribución del movimiento conjunto de las partículas del fluido que atraviesan una superficie, y (b) Transporte molecular o propagación, debido a la contribución viscosa originada en los gradientes de velocidad.
- La aceleración gravitatoria es un vector de tres componentes.

Para iniciar el balance solo tendremos en cuenta la componente x de cada uno de los términos de la ecuación, tal como lo muestra la figura siguiente. Los correspondientes a los ejes y, z se pueden obtener por analogía.



1- El termino de flujo global o velocidad de flujo de cantidad de movimiento por convección a través de las seis caras, puede representarse por el producto de la componente de la “velocidad másica” (ρv) con la velocidad en dirección x (v_x) multiplicadas por el área transversal o superficie de la cara en cuestión. Por lo tanto, se puede escribir;

- Entrada en la cara x: $(\rho v_x)v_x \Delta y \Delta z|_x$
- Salida por x + Δx: $(\rho v_x)v_x \Delta y \Delta z|_{x+\Delta x}$
- Entrada en la cara y: $(\rho v_y)v_x \Delta x \Delta z|_y$
- Salida por y+Δy: $(\rho v_y)v_x \Delta x \Delta z|_{y+\Delta y}$
- Entrada en la cara z: $(\rho v_z)v_x \Delta x \Delta y|_z$
- Salida por z+Δz: $(\rho v_z)v_x \Delta x \Delta y|_{z+\Delta z}$

2- Para la propagación, tenemos que puede formularse para todas las caras en forma similar, donde las densidades de flujo de cantidad de movimiento pueden considerarse como esfuerzos (τ_{ij}). La convección indica que el primer subíndice indica la dirección de la propagación y el segundo la de la velocidad. Para este caso, el segundo subíndice será siempre ”x”. El término τ_{xx} es el esfuerzo normal que actúa sobre la cara x, y los términos τ_{yx} y τ_{zx} son los esfuerzos tangenciales, quedando:

- Entrada en la cara x: $\tau_{xx} \Delta y \Delta z|_{x+\Delta x}$
- Salida por x+ Δx: $\tau_{xx} \Delta y \Delta z|_{x+\Delta x}$
- Entrada en la cara y: $\tau_{yx} \Delta x \Delta z|_y$
- Salida por y+Δy: $\tau_{yx} \Delta x \Delta z|_{y+\Delta y}$
- Entrada en la cara z: $\tau_{zx} \Delta x \Delta y|_z$
- Salida por z+Δz: $\tau_{zx} \Delta x \Delta y|_{z+\Delta z}$

3- Las únicas fuerzas que se tienen en cuenta en este caso son las de presión del fluido y la gravitación, en la dirección del moviendo considerado (dirección x), resultando;

- Para la presión en x: $(p|_x - p|_{x+\Delta x})\Delta y \Delta z$
- Para la gravitación en x: $\rho g_x (\Delta x \Delta y \Delta z)$

4- la velocidad de acumulación de cantidad de movimiento (en la dirección "x") en el elemento de volumen será;

- velocidad de acumulación en x: $\dfrac{\Delta \rho v_x}{\Delta \theta}(\Delta x \Delta y \Delta z)$

Sustituyendo cada una de las anteriores en la expresión general correspondiente al balance y dividimos por el elemento de volumen (Δx Δy Δz) obteniendo una expresión incremental de le la variación de cantidad de movimiento en el tiempo y espacio.

$$\frac{\Delta \rho v_x}{\Delta \theta} = \frac{\rho v_x v_x\,|_x - \rho v_x v_x\,|_{x+\Delta x}}{\Delta x} + \frac{\rho v_y v_x\,|_y - \rho v_y v_x\,|_{y+\Delta y}}{\Delta y}$$

$$+ \frac{\rho v_z v_x\,|_z - \rho v_z v_x\,|_{z+\Delta z}}{\Delta z} + \frac{\tau_{xx}|_x - \tau_{xx}|_{x+\Delta x}}{\Delta x} + \frac{\tau_{yx}|_x - \tau_{yx}|_{y+\Delta y}}{\Delta y} +$$

$$+ \frac{\tau_{zx}|_x - \tau_{zx}|_{z+\Delta z}}{\Delta z} + \frac{p|_x - p|_{x+\Delta x}}{\Delta x} + \rho g_x$$

Aplicando límite cuando la norma de los incrementos $(\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta \theta)$ tiende a cero, se obtiene la componente "x" de la ecuación del movimiento.

- Componente "x":

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial \theta} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\rho\, v_x v_x + \frac{\partial}{\partial y}\rho\, v_y v_x + \frac{\partial}{\partial z}\rho\, v_z v_x\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x}\tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}\tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial z}\tau_{zx}\right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

De igual manera se pueden obtener las correspondientes a las coordenadas "y", "z":

- Componente "y":

$$\frac{\partial \rho v_y}{\partial \theta} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\rho\, v_x v_y + \frac{\partial}{\partial y}\rho\, v_x v_y + \frac{\partial}{\partial z}\rho\, v_z v_y\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x}\tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y}\tau_{yy} + \frac{\partial}{\partial z}\tau_{zy}\right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y$$

- Componente "z":

$$\frac{\partial \rho v_z}{\partial \theta} = -\left(\frac{\partial}{\partial x} \rho v_x v_z + \frac{\partial}{\partial y} \rho v_x v_z + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z v_z \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yz} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zz} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z$$

Los términos se pueden identificar de la siguiente forma;

- Velocidad másica (ρv), un vector cuyos tres componentes espaciales son: ρv_x, ρv_y, ρv_z
- Aceleración gravitatoria (g), un vector cuyos tres componentes son: g_x, g_y, g_z.
- Gradiente de presión (∇p), un vector cuyos tres componentes son: $\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}$
- Tensor esfuerzo τ_{ij} de segundo orden, correspondiente a la “propagación”, con nueve componentes: τ_{xx}, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yx}, τ_{yy}, τ_{yz}, τ_{zx}, τ_{zy},, τ_{zz}
- Densidad de flujo convectivo de cantidad de movimiento (ρvv), producto diádico de los vectores velocidad por velocidad másica, de nueve componentes: $\rho v_x v_x$, $\rho v_x v_y$, $\rho v_x v_z$, $\rho v_y v_x$, $\rho v_y v_y$, $\rho v_y v_z$, $\rho v_z v_x$, $\rho v_z v_y$, $\rho v_z v_z$

En notación vectorial-tensorial, se puede escribir:

$$\boxed{\frac{\partial \rho v}{\partial \theta} = -\left[\nabla.\rho v v\right] - \left[\nabla.\tau\right] - \nabla p + \rho g}$$

El término $\left[\nabla.\rho v v\right]$ representa la velocidad de perdida de cantidad de movimiento (un vector) por unidad de volumen debido al flujo de fluido, mientras que $\left[\nabla.\tau\right]$ representa la perdida de cantidad de movimiento debido a la viscosidad. Estos términos no son divergencias simples, por el origen tensorial del producto diádico y tensor esfuerzo.

Para la expresión del término en dirección “x”, si aplicamos la ecuación de continuidad al primer miembro y al primer termino del segundo miembro, la misma puede reordenarse, quedando:

$$\rho \frac{D v_x}{D\theta} = \frac{\partial p}{\partial x} - \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zx} \right) + \rho g_x$$

Idéntica transformación se puede realizar para las direcciones “y” y “z”, obteniendo una expresión en notación compacta que describe el movimiento de una partícula de fluido que se mueve bajo el efecto de las fuerzas que actúan sobre ella, a saber;

$$\boxed{\rho \frac{D v}{D \theta} = -\nabla p - \left[\nabla .\tau\right] + \rho g}$$

La ecuación del movimiento expresada así establece una expresión de la segunda ley de Newton, en la cual (masa x aceleración= suma de fuerzas). El balance de cantidad de movimiento aplicado a un fluido es totalmente equivalente a la segunda ley de Newton, donde las fuerzas que actúan son las originadas en la presión, la viscosidad, y la gravitación.

Los términos se pueden identificar de la siguiente forma:

- $\frac{\partial \rho v}{\partial \theta}$: Velocidad de aumento de cantidad de movimiento por unidad de volumen.
- $-\left[\nabla.\rho vv\right]$: Velocidad de ganancia de cantidad de movimiento por convección por unidad de volumen.
- $-\nabla p$: Fuerza de presión sobre el elemento por unidad de volumen.
- $-\left[\nabla.\tau\right]$: Velocidad de ganancia de cantidad de movimiento por transporte viscoso, por unidad de volumen (equivale a fuerza viscosa sobre elemento por unidad de volumen).
- ρg : Fuerza de gravitación que actúa sobre el elemento de volumen.
- $\rho \frac{\partial v}{\partial \theta}$: Masa por unidad de volumen, por aceleración.

En cada caso, la expresión con la “derivada parcial” representa un balance aplicado a un elemento de volumen fijo en el espacio, mientras que la correspondiente a la “derivada sustancial” describe las variaciones del elemento que sigue el movimiento del fluido. Ambas son validas para medios continuos, sin importar la naturaleza de la relación esfuerzo-deformación, es decir, pueden aplicarse tanto a fluidos newtonianos como no-newtonianos, como tampoco distingue entre los fluidos compresibles o incompresibles.

Aplicando las relaciones entre esfuerzo-deformaciones (ver apéndice), aquellas expresiones pueden transformarse para obtener las distribuciones de velocidad del fluido, obteniendo ecuaciones generales que describen el movimiento del fluido.

ECUACIONES DE NAVIER-STOKES

Hemos obtenido anteriormente, la Ecuación de Continuidad,

$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta} = -(\nabla.\rho v)$$

Y la Ecuación del Movimiento en función de los esfuerzos cortantes,

$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta} = -\nabla p - \left[\nabla.\tau\right] + \rho g$$

En esta última se establece que un pequeño elemento de volumen que se mueve con el fluido es acelerado por las fuerzas que actúan sobre él (fuerzas de presión, gravitación y viscosidad). Estas ecuaciones la representación de la segunda Ley de Newton a un fluido en movimiento.

Sin embargo, de acuerdo a las relaciones obtenidas entre esfuerzos y deformaciones (ver Apéndice Páginas 21 a 26), podemos decir que tenemos seis componentes del esfuerzo desconocidas y tres componentes de velocidad también desconocidas, con lo que existen nueve incógnitas en las ecuaciones.

Se tratará de reducir el exceso de incógnitas por la introducción de ecuaciones constitutivas que relacionan el esfuerzo con la velocidad, para obtener expresiones que relacionen solamente velocidades, presiones y gravitación.

Para ello se desarrollara la ecuación cartesiana de cantidad de movimiento para una dirección (el eje x), que puede expresarse,

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial \theta} = -\left(\frac{\partial \rho\, v_x v_x}{\partial x} + \frac{\partial\, \rho\, v_y v_x}{\partial y} + \frac{\partial \rho\, v_z v_x}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

Que, combinada con la ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta} = -\left(\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial\, \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} \right)$$

Permite obtener la componente x de la aceleración por unidad de volumen de fluido,

$$\rho \frac{Dv_x}{D\theta} = -\frac{\partial \rho}{\partial x} - \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

Introduciendo las expresiones del esfuerzo del Apéndice, quedará,

$$\rho \frac{Dv_x}{D\theta} = -\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu(\nabla . v) \right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right] + \rho g_x$$

Ecuaciones similares se pueden obtener para las direcciones “y”, “z”.

Estas ecuaciones, junto a la ecuación de continuidad, la ecuación de estado p=p(ρ). La variación de viscosidad con la densidad μ=μ(ρ), y las condiciones iniciales y límite, determinan en forma completa la presión, densidad y los componentes de velocidad de un fluido en movimiento isotérmico.

La expresión general de la Ecuación del Movimiento, en notación vectorial-tensorial quedará entones,

$$\frac{Dv}{D\theta} = -\nabla p - \mu\nabla^2 v + \frac{\mu}{3}\nabla(\nabla.v) + \rho g$$

Para el caso de fluidos de viscosidad constante. Como la viscosidad es función de la temperatura principalmente y en pequeña medida de la presión, la anterior se puede aplicar aún en los casos de moderados cambios de presión.

Para el caso de fluidos newtonianos (viscosidad constante) e incompresibles (densidad constante), la ecuación de continuidad predice que,

$$(\nabla.v) = 0$$

Por lo que la anterior se puede simplificar para obtener la conocida Ecuación de Navier-Stokes, que en coordenadas cartesianas viene representada por,

$$\rho\frac{Dv}{D\theta} = -\nabla p + \mu\nabla^2 v + \rho g$$

Las componentes cartesianas, así como las expresiones correspondientes a coordenadas cilíndricas y esféricas se encuentran tabuladas.

En principio, con la Ecuación del Movimiento y la Ecuación de Continuidad se puede obtener la solución de cualquier problema de flujo isotérmico. Sin embargo, las soluciones generales de las Ecuaciones de Navier-Stokes aún no han sido encontradas debido a la naturaleza no lineal de las ecuaciones diferenciales de derivadas parciales de segundo orden.

No obstante, un buen número de soluciones particulares se pueden obtener, y se obtienen, en ciertos sistemas de flujo más simples o sencillos. Para ello debe disponerse de la descripción física del sistema y usando las tablas en el sistema coordenado adecuado, descartando los términos de valor cero. Este procedimiento tiene que hacer uso de una cierta intuición para poder aproximarse a la solución.

ECUACION DE EULER

Para el caso de considerar un fluido no-viscoso, el término de esfuerzos constantes es nulo, y la Ecuación del Movimiento se reduce a:

$$\rho\frac{Dv}{D\theta} = -\nabla p + \rho g$$

Que dice que los cambios de velocidad del fluido se deben exclusivamente a las fuerzas de presión y gravitatorias. Si bien los fluidos reales tienen viscosidad, esta ecuación se puede aplicar el caso de que los efectos viscosos son poco importantes.

ECUACION DE LA ENERGIA MECANICA

Dada la Ecuación de Movimiento, expresada de la forma:

$$\rho \frac{Dv}{D\theta} = -\nabla p - [\nabla.\tau] + \rho g$$

Se forma el producto escalar de la velocidad con la misma. La ecuación resultante es una ecuación escalar, y describe la velocidad de variación de la energía cinética por unidad de masa (½ v^2) para el elemento de fluido que se mueve con la corriente, quedando:

$$\rho \frac{D(\frac{1}{2}v^2)}{D\theta} = -(v.\nabla p) - (v[\nabla.\tau]) + \rho(v.g)$$

La Ecuación se conoce con el nombre de Ecuación de la Energía Mecánica y representa la ínterconversión de energía mecánica de un fluido en movimiento.

Desarrollando la ecuación en función de las derivadas parciales, se puede escribir:

- Para la derivada sustancial, según la ecuación de continuidad,

$$\rho \frac{D(\frac{1}{2}v^2)}{D\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}(\tfrac{1}{2}\rho v^2) + (\nabla \tfrac{1}{2}\rho v^2 v)$$

- Para el término de presión, según las reglas de derivación.

$$(\nabla.pv) = (v.\nabla p) + p(\nabla v)$$

- Para la contribución viscosa, de igual forma,

$$(\nabla.[\tau.v]) = (v.[\tau.\nabla]) + (\tau : \nabla v)$$

Quedando entonces la Ecuación de la Energía Mecánica en función de un elemento estacionario de volumen por donde circula el fluido,

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(\tfrac{1}{2}\rho v^2) = -(\nabla\tfrac{1}{2}\rho v^2 v) - (\nabla.pv) - p(-\nabla.v) - (\nabla.[\tau.v]) - (-\tau:\nabla v) + \rho(v.g)$$

Donde el significado físico de cada término es el siguiente:

- $\frac{\partial}{\partial\theta}(\tfrac{1}{2}\rho v^2)$: Velocidad de incremento de energía cinética por unida de volumen.
- $-(\nabla\tfrac{1}{2}\rho v^2 v)$: Velocidad neta de entrada de energía cinética debida al fluido global.
- $-(\nabla.pv)$: Velocidad de trabajo producido por la presión de los alrededores sobre el elemento de volumen.
- $-\rho(-\nabla.v)$: Velocidad de conversión "reversible" en energía interna.
- $-(\nabla.[\tau.v])$: Velocidad de trabajo producido por las fuerzas viscosas que actúan sobre el

elemento de volumen.

- $-(-\tau : \nabla v)$: Velocidad de conversión "irreversible" en energía interna **(1)**
- $\rho(v.g)$: Velocidad de trabajo producido por la fuerza de gravedad que actúa sobre el elemento de volumen.

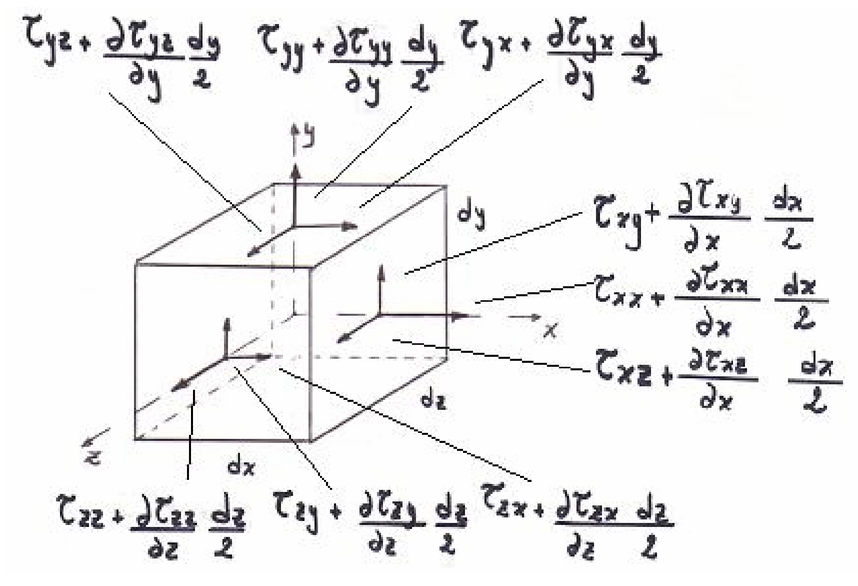
El término **(1)** será desarrollado posteriormente, pero indica que en los sistemas de flujo hay una degradación de energía mecánica en energía calorífica, y que los procesos reales no son reversibles.

Un sistema "isotérmico", es por lo tanto, aquel en que el calor generado o absorbido no da variación apreciable de temperatura.

Esta ecuación servirá posteriormente para la deducción del balance de energía mecánica macroscópico o Ecuación de Bernoulli.

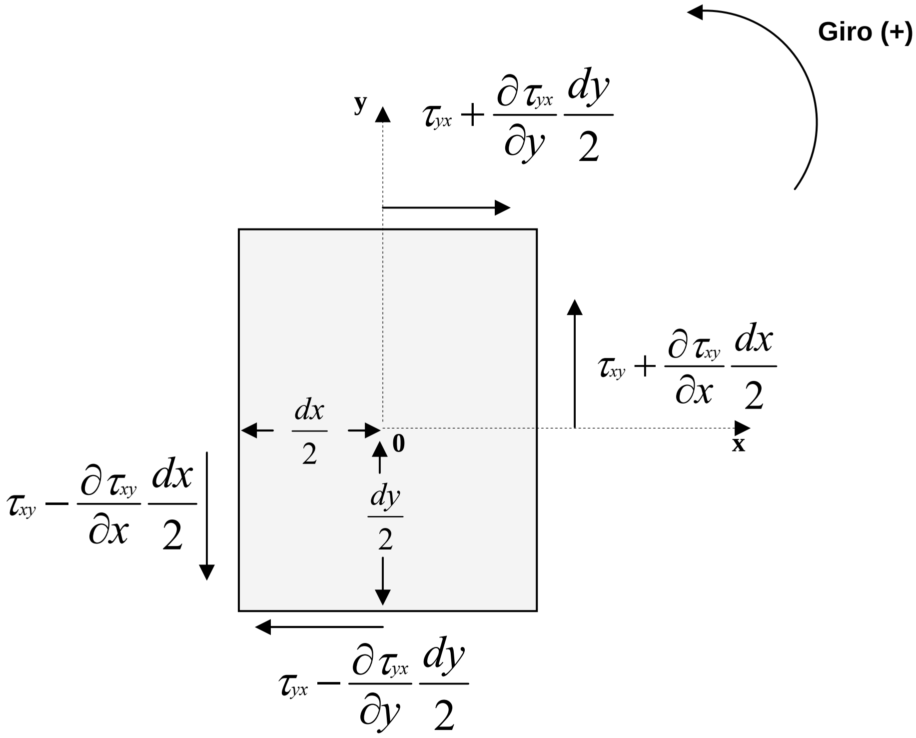
APENDICE: TRANSPORTE MOLECULAR Y ESFUERZOS

Para fuerzas normales y tangenciales que actúan sobre un poco en un fluido serán completamente definidas por nueve componentes tal como se muestra en la figura para las 3 caras positivas de un elemento cúbico en el espacio, cuyo centro está en el origen de coordenadas.



Para las 3 caras negativas actúan las mismas ternas de esfuerzos pero en sentido negativo. Estos no son independientes, ya que se demuestra que los *esfuerzos cuyos subíndices están permutados (p.ej. τ_{xy}= τ_{yx}) son iguales.*

Para demostrarlo, mostraremos para una cara situada en un plano z=0, los esfuerzos tangenciales que actúan sobre la misma en las direcciones x e y.



Estos esfuerzos que actúan en cada cara son los que originan la deformación del elemento de volumen (el cuadrado en este caso).

La suma algebraica de los momentos de las fuerzas alrededor del eje z (perpendicular al plano del papel) es igual al producto de la masa por el cuadrado del radio de giro y por la aceleración angular (Ver página 26). No existe contribución de las fuerzas normales a la cara, ni de las fuerzas del campo gravitatorio porque no tienen momento respecto al eje z.

Así, considerando el sentido positivo contrario al giro de las agujas del reloj, obtendrá, Momento = Fuerza x Área x distancia= m r^2_{giro} a_{ang}

$$\left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\frac{dx}{2} + \tau_{xy} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dydz\frac{dx}{2}$$

$$-\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2} + \tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2}\right) dzdx\frac{dy}{2} = \rho dxdydz\left(r_{giro}\right)^2\left(a_{ang}\right)$$

De aquí,

$$\boxed{\tau_{xy} - \tau_{yx} = \rho\left(r_{giro}\right)^2\left(a_{ang}\right)}$$

Para un elemento cuyo radio de giro tienda a cero, el segundo miembro de la ecuación debe tender a cero (para aceleración angular finita) y luego,

$$\boxed{\tau_{xy} = \tau_{yx}}$$

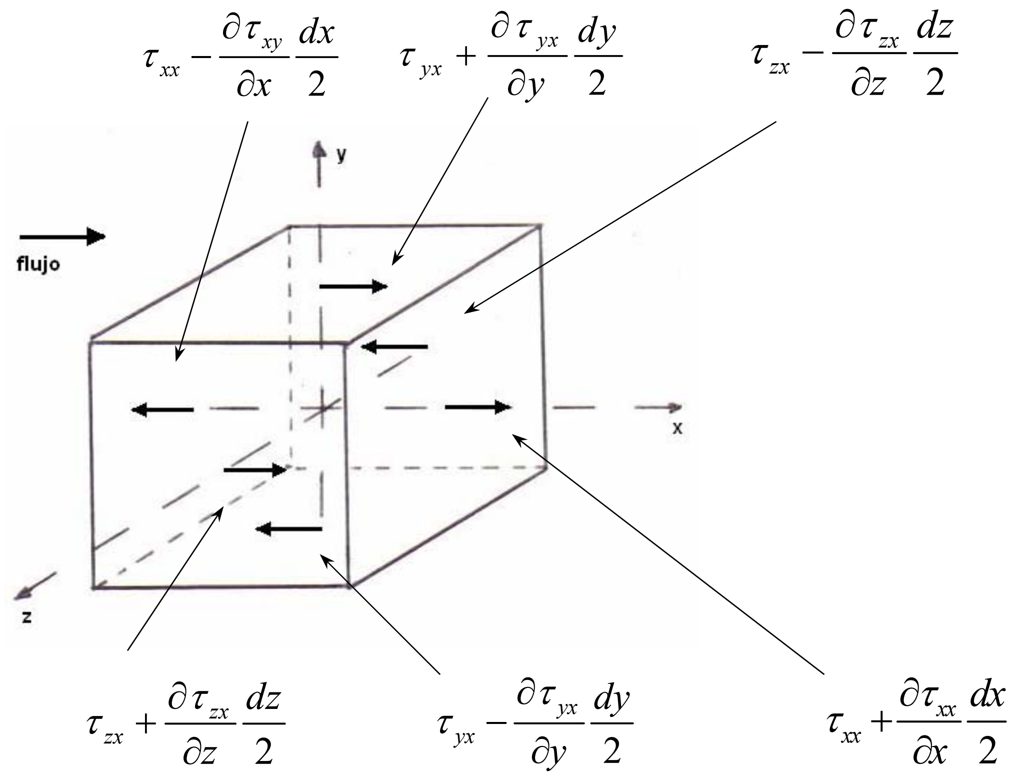
De igual forma, tomando momentos alrededor de ejes x e y respectivamente, se cumplirá,

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

Demostrado lo anterior podemos ejecutar la suma de todas las fuerzas normales y tangenciales que actúan sobre el elemento de volumen.

A fin de simplificar el modelo analizaremos solamente las fuerzas originadas por un movimiento del fluido en la dirección-x, como se muestra en la figura;



Para las direcciones y-z existirán los mismos sistemas de fuerzas centrados en cada cara. Luego la fuerza que actúa en la dirección-z será,

$$\sum F_x = \left(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\frac{dx}{2} + \tau_{xx} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\frac{dx}{2} \right) dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2} + \tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2} \right) dxdz$$
$$+ \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\frac{dz}{2} + \tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\frac{dz}{2} \right) dxdy$$

Para lo cual, realizando las operaciones se obtienen,

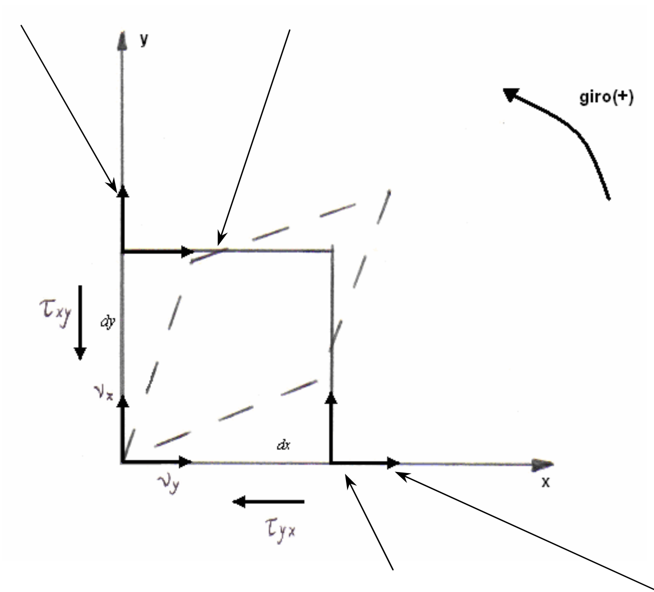
$$\sum F_x = \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dxdydz$$

RELACIONES ENTRE LOS ESFUERZOS CORTANTES Y LA VISCOSIDAD

La expresión (unidimensional) de la Ley de Newton indica que la viscosidad de un fluido es la propiedad que describe su resistencia a los esfuerzos de deformación, y en los fluidos Newtonianos la magnitud del esfuerzo de deformación es una función lineal de la velocidad de deformación angular.

Esto se puede poner en evidencia considerando un elemento bidimensional de fluido que está sujeto a una deformación angular, ya que cuando existen las velocidades en cada dirección espacial se obtiene el rombo (figura punteada) a partir del cuadrado original.

$$v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy \qquad v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy$$



$$v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} dx \qquad v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx$$

La velocidad angular del elemento lineal dx será,

$$veloc.ang._x = \frac{\left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} dx\right) - v_y}{dx} = \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

Para el elemento dy,

$$veloc.ang._x = \frac{v_x - \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx\right)}{dy} = -\frac{\partial v_x}{\partial y}$$

Se ha tomado como sentido positivo de giro la contraria a la rotación de las agujas del reloj.

La velocidad "neta" de deformación angular del elemento se la diferencia entre las velocidades angulares dx y dy,

$$veloc.neta.def.ang. = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \left(-\frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

Anteriormente se obtuvo la expresión de Newton que relacionaba la densidad de flujo de cantidad de movimiento con la deformación angular en un fluido con <u>una sola componente de viscosidad</u>. Luego, para el caso de una cara del elemento de volumen, bidimensional, la relación será,

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = -\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)$$

Para los esfuerzos normales se llega a demostrar que,

$$\tau_{xx} = -2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu \left(\nabla .v \right)$$

$$\tau_{yy} = -2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{2}{3}\mu \left(\nabla .v \right)$$

$$\tau_{zz} = -2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{2}{3}\mu \left(\nabla .v \right)$$

Demostración

Suponiendo una masa m que gira alrededor de un eje con cierta distancia r con una velocidad angular w, y a la que se aplica una fuerza tangencial F. Si consideramos que no actúan otras fuerzas, la F tiende a aumentar la velocidad angular en dw.

El trabajo ejecutado será:

$$dw = Fds = Frd\varphi$$
$$dw = Md\varphi$$

Siendo:

- M: momento respecto al eje

La energía cinética inicial será:

$$Ec = ½mv^2 = ½mr^2w^2$$

Siendo:

- $v = rw$

Y el incremento,

$$d(Ec) = mr^2wdw$$

Si no hay rozamiento,

$$dw = d(Ec)$$
$$Md\varphi = mr^2wdw$$
$$M = mr^2w\frac{dw}{d\varphi}$$

Y como la aceleración angular (α) será:

$$\alpha = w\frac{dw}{d\varphi} = \frac{d\varphi}{d\theta}\frac{dw}{d\varphi} = \frac{dw}{d\theta}$$
$$M = mr^2\alpha$$
$$M = I\alpha$$

Siendo:

- $I=mr^2$ el momento de inercia respecto al eje.

2.C. ANALISIS DIMENSIONAL

Muchos problemas planteados en ingeniería, tanto en el flujo de fluidos como en la transmisión del calor o la transferencia de masa, no se pueden solucionar por métodos exclusivamente analíticos. Tampoco es posible obtener expresiones generales únicamente por vía experimental, ya que cuando una función depende de varias variables, para obtener una relación completa se deberán fijar todos los factores menos uno, para determinar entonces el efecto de este y así sucesivamente, resultando extremadamente laborioso relacionar todos los datos en un resultado único que comprenda todas las alternativas.

Como resultado de la experimentación, se puede llegar a ecuaciones empíricas donde no se necesita prestar atención a su coherencia dimensional, es decir, que se pueden aplicar a ecuaciones cuyos términos sean aparentemente de diferentes dimensiones. En estas ecuaciones dimensionalmente heterogéneas, solo se pueden utilizar las variables en las unidades que están especificadas.

Entonces, por ejemplo, si se estudia un fenómeno que depende de cinco variables, por el método empírico habría que realizar por lo menos 100.000 experimentos para obtener series de 10 ensayos donde cada variable está determinada por las otras cuatro fijadas en distintos valores. Además de la cantidad de datos a correlacionar, generalmente algunas de las variables son difíciles de manipular y el método resulta bastante limitado de aplicar para obtener resultados amplios y generales.

Un método intermedio consiste en la aplicación del Análisis Dimensional, que se basa en la proposición de que si hay una solución analítica que relacione todas las variables, la expresión resultante deberá ser dimensionalmente homogénea, es decir, todos sus términos tienen las mismas dimensiones, mientras que las constantes numéricas que ellas puedan contener son adimensionales, resultando posible obtener la forma en que aparecen las variables. Una ecuación de esta índole puede aplicarse con cualquier sistema de unidades, siempre que estas sean coherentes entre sí, o lo que es lo mismo, utilizar las mismas para cada magnitud fundamental.

Queda entonces determinado que, si en una ecuación de este tipo se dividen todos los términos por uno de ellos, estos se transformarán en relaciones adimensionales. Una combinación de variables tal que sus dimensiones se anulan, reciben el nombre de grupo, número o razón adimensional y su valor es siempre el mismo, sin importar el sistema de unidades que se utilice mientras sea homogéneo.

Las expresiones obtenidas solo conducen a estas relaciones entre las variables, no se conocen los valores de las constantes numéricas, por lo que no se obtiene el resultado final completo de la ecuación. Sin embargo, es un poderoso y valioso método que orienta a la experimentación mínima indispensable para corroborar los resultados, ya que reduce drásticamente la cantidad de ensayos que deberían realizarse.

El Análisis Dimensional se puede aplicar directamente a las denominadas Ecuaciones de Cambio (Ecuación de Continuidad, Ecuación del Movimiento) o puede estudiarse a partir de un teorema fundamental (Teorema de Buckingham) siguiendo un proceso deductivo-inductivo que se apoya en resultados experimentales previos y posteriores relacionados con el problema en cuestión.

ANÁLISIS DIMENSIONAL DE LAS ECUACIONES DE CAMBIO Ó VARIACIÓN

Partiremos de las Ecuaciones de Continuidad y del Movimiento deducidas previamente, para mayor sencillez en esta introducción nos limitaremos a aplicarlo en fluidos cuya densidad y viscosidad son constantes, aunque debe destacarse que el procedimiento es general y no tiene limitaciones en cuanto a estas condiciones.

Para un sistema de flujo cualquiera, es posible identificar arbitrariamente una longitud característica "D" y una velocidad característica "V" del mismo, Por ejemplo, "D" es para flujos en conductos cilíndricos el diámetro del tubo circular y para flujo alrededor de esferas el diámetro de la misma, mientras "V" es la velocidad media en el tubo y la velocidad de aproximación, respectivamente. Si bien la elección es arbitraria, deberá ser cuidadosamente especificada en cada caso que se trate.

A partir de esa elección, se podrán definir una serie de variables adimensionales y operaciones diferenciales, que en todos los casos cumplirán las mismas condiciones de transformación, según las siguientes relaciones donde los símbolos tienen el significado habitual;

$$v^* = v/V \ ; \qquad p^* = (p - p_0)/\rho V^2 \ ; \qquad \Theta^* = \Theta\, V/D \ ;$$

$$x^* = x/D \ ; \qquad y^* = y/D \ ; \qquad z^* = z/D \ ;$$

$$\nabla^* = D\nabla = \delta_1 (\partial /\partial x^*) + \delta_2 (\partial /\partial y^*) + \delta_3 (\partial /\partial z^*) \ ;$$

$$\nabla^{*2} = D^2 \nabla^2 = \partial^2 /\partial x^{*2} + \partial^2 /\partial y^{*2} + \partial^2 /\partial z^{*2}$$

$$(\mathbf{D} /\mathbf{D}\Theta^*) = (D/V)\, (\mathbf{D} /\mathbf{D}\Theta)$$

Recordando las expresiones de las Ecuaciones de Cambio, para fluidos newtonianos de densidad y viscosidad constante;

Ecuación de Continuidad: $(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$

Ecuación del Movimiento:

$$\rho(\mathbf{Dv}/\mathbf{D}\Theta)= -\nabla p + \mu\, \nabla^2\mathbf{v} + \rho\mathbf{g}$$

e introduciendo las variables adimensionales definidas anteriormente, estas ecuaciones quedarán de la siguiente forma;

Ec. de Continuidad con variables adimensionales: $1/D\,(\nabla^* \cdot \mathbf{v}^*V) = 0$

Ec. del Movimiento con variables adimensionales):

$$\rho\,(V/D)(\mathbf{D}\,\mathbf{v}^*V/\mathbf{D}\Theta^*) = -\,1/D\,(\nabla^* \cdot p^*\,\rho V^2)+ (\mu/D^2)\,\nabla^{*2}(\mathbf{v}^*V) + \rho\mathbf{g}$$

Reordenándolas y simplificando términos, se obtiene;

Ec. de Continuidad (adimensional): $(\nabla^* \cdot \mathbf{v}^*) = 0$

Ec. del Movimiento (adimensional):

$$(\mathbf{Dv}^*/\mathbf{D}\Theta^*) = -\,(\nabla^*\, p^*)+ [\mu/DV\rho]\,\nabla^{*2}\mathbf{v}^* + [g\,D/V^2]\,(\mathbf{g}/g)$$

Las anteriores son las Ecuaciones de Variación equivalentes a las de partida, pero presentadas con la forma de sus variables adimensionales, describiendo el movimiento del fluido de igual manera que las expresiones dimensionales. En la Ecuación del Movimiento aquí presentada, por otra parte, aquellas variables que describen el tamaño total, la velocidad del sistema y las propiedades físicas se agrupan en un coeficiente que también es adimensional y que se puede denominar como el "factor de escala" de la expresión.

De acuerdo a los Principios de Semejanza, si en dos sistemas diferentes sus factores de escala son iguales para ambos, ambos están descritos por idénticas ecuaciones diferenciales adimensionales. Además, si las condiciones adimensionales inicial y límite son las mismas, lo que implica la restricción de Semejanza Geométrica, los dos sistemas son matemáticamente idénticos, o en otras palabras, la distribución de la velocidad y de la presión adimensionales son las mismas para cada uno de ellos, cumpliendo entonces la condición de Semejanza Dinámica.

Para el pasaje de escala en procesos que no se conocen muy bien, deberían mantenerse las restricciones de Semejanza Geométrica y Dinámica para obtener resultados comparables.

En este caso particular, como los factores de escala obtenidos intervienen con mucha frecuencia en los estudios de ingeniería, reciben los nombres particulares de Número de Reynolds y Número de Froude, en honor a los celebres investigadores en el estudio de la mecánica de los fluidos. Cabe destacar que en las expresiones se obtienen las inversas de los mismos, que relacionan las fuerzas inerciales, las fuerzas viscosas y las gravitatorias, según;

Número de Reynolds: $$Re = \frac{\rho\ v\ D}{\mu} \equiv \frac{\text{Fuerzas Inerciales}}{\text{Fuerzas Viscosas}}$$

Partiendo de la expresión de la Ecuación del Movimiento en función de las presiones locales y la gravitación, se hubiera obtenido un segundo factor de escala, que es la inversa del denominado Número de Froude, que relaciona las fuerzas inerciales con las gravitatorias, según;

Número de Froude: $$Fr = \frac{v^2}{g\ D} \equiv \frac{\text{Fuerzas Inerciales}}{\text{Fuerzas Gravitatorias}}$$

ANÁLISIS DIMENSIONAL POR EL TEOREMA DE BUCKINGHAM

Tal como se presentó anteriormente en este curso, ya en el año 1850 Stokes estableció que en un sistema de flujo geométricamente semejante puede utilizarse el número de Reynolds como criterio de semejanza dinámica. En 1914, Buckingham formuló el denominado teorema de π, que es el fundamento de la descripción siguiente. Según Bridgman, los principios fundamentales del método son los siguientes:

1) Todas las magnitudes físicas pueden expresarse como funciones potenciales de un reducido número de magnitudes fundamentales.
2) Las ecuaciones que relacionan las magnitudes físicas son homogéneas desde un punto de vista dimensional, es decir, todos los términos tienen las mismas dimensiones.
3) Teorema π de Buckingham; si una ecuación es dimensionalmente homogénea, puede reducirse a una serie completa de números adimensionales, en los que figuran todas las variables físicas que influyen en el fenómeno, las constantes dimensionales que puedan corresponder al sistema de unidades elegido (si este fuera redundante) y las constantes universales que puedan intervenir en el fenómeno que se trate.

En forma muy general y según algunos autores, solo existirían cinco constantes universales imprescindibles; (i) la velocidad de la luz, (ii) la constante de Planck, (iii) la constante de gravitación, (iv) la constante dieléctrica y (v) la constante de Boltzmann. En general en el campo de la Ingeniería Química y en especial en el de los Fenómenos de Transporte, las anteriores no suelen intervenir habitualmente, aunque sí las magnitudes físicas fundamentales, tales como la masa (M), la longitud (L), el tiempo (θ) y la temperatura (T), entre otras.

Así, una descripción completa de un fenómeno estará representada por la función;

$$Ŧ\ (N_1^a, N_2^b, N_3^c, \ldots N_i^k) = 0$$

donde (N_1, N_2, N_3, . . . N_i) son las variables o constantes dimensionales y (a, b, c, . . .k) los exponentes a los que deben estar elevadas para obtener la solución del problema.

El teorema π de Buckingham del tercer apartado es una consecuencia de los dos anteriores, teniendo una demostración matemática que excede los alcances del curso y de estas notas. Plantea que una serie de números adimensionales es completa cuando todos ellos son independientes entre sí, de manera que cualquier otro que pueda formarse con las mismas variables sería una combinación de dos o más números adimensionales de los contenidos en la serie completa original. En forma restringida, la cantidad de números adimensionales π independientes, que pueden formarse con N variables y constantes dimensionales es igual a su diferencia con la cantidad de magnitudes fundamentales F del sistema de unidades elegido, es decir;

$$\pi = N - F$$

En una forma menos restringida, la relación anterior se puede expresar como ($\pi = N - j$), donde j será la característica de una matriz formada por los exponentes en que están elevadas las magnitudes fundamentales en las ecuaciones dimensionales de las distintas variables y constantes dimensionales con relación a un determinado sistema de unidades, o sea, el orden del mayor determinante distinto de cero que puede formarse a partir de dicha matriz. En la mayoría de los casos, j coincide con F.

En conclusión, siendo π_1, π_2, π_3, . . . π_n, una serie completa de relaciones adimensionales que pueden formarse con las variables que determinan un cierto fenómeno, el Teorema π de Buckingham se puede representar por,

$$f\ (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots \pi_n) = 0$$

donde f es una función universal independiente del sistema de unidades elegido.

Como ocurre en muchos casos, si su resolución en términos de funciones conocidas resulta muy difícil, se utilizan formas de representación gráfica o de aproximaciones.

Si bien existen dos métodos principales para resolver un sistema aplicando el teorema, identificados como métodos de Buckingham y de Rayleigh, en nuestras aplicaciones utilizaremos una forma simplificada propuesta por Kay (considerando que $j \equiv F$) , siguiendo ordenadamente los siguientes pasos;

a) Identificar y establecer todas las variables (N) que condicionan el fenómeno en estudio.

b) Formular el sistema de magnitudes fundamentales (F) que se desee. Esta elección deberá contener no menos de todas las magnitudes que intervienen en el fenómeno. Ocasionalmente, puede ser redundante conteniendo magnitudes derivadas de las fundamentales.

c) Calcular la cantidad de grupos adimensionales (π = N - F) que describirán el fenómeno.

d) Separar una cantidad π del total de N variables, teniendo en cuenta que cada magnitud fundamental deberá aparecer por lo menos una vez entre las elegidas (en este método simplificado, el proceso de selección es por tanteo, necesitando conocer previamente algo de la naturaleza física del fenómeno). Estas variables serán conocidas como "características", porque aparecerán solamente en uno de los números adimensionales que se formen (el que la caracteriza).

e) Formular ecuaciones entre cada variable "característica" y todas las restantes variables "no características". Deben quedar conformadas π ecuaciones, en cada una se encuentra solo una variable característica, un grupo adimensional y todas las variables no-características elevadas a un exponente particular.

f) Reemplazar en cada una las variables por sus dimensiones (no unidades) y resolver entre cada variable "característica" y todas las restantes variables "no características". Formar una matriz de los exponentes a que quedan afectadas las magnitudes fundamentales en las ecuaciones dimensionales de las variables. Al resolver, se debería obtener el valor del exponente que afecta a cada variable.

g) Introducir los resultados en el conjunto de expresiones del apartado "e". Se obtendrán las expresiones de los números adimensionales (π_1, π_2, π_3, . . . π_n) formado por productos, cocientes o potencias de las variables que intervienen en la solución del problema. No se obtienen las constantes numéricas adimensionales de las ecuaciones, que deberán determinarse por experimentación.

En conclusión, se puede verificar una significativa reducción en la cantidad de ensayos a realizar para obtener una correlación que describa el fenómeno. Así, en el ejemplo inicial de cinco variables, si fueran tres las dimensiones fundamentales consideradas la descripción se lograría con dos grupos adimensionales independientes, por lo que se deberían realizar solamente 100 ensayos con las mismas premisas anteriores.